JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVI. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG

S E Z A M K O, Školský rok 2022/2023, 2. zimná séria

Vzorové riešenia

Úloha č. 1 *(opravoval Hynek Bachratý)*

Nájsť riešenie úlohy, ktorej výsledky závisia od náhody pri hádzaní dvoma kockami, je vždy trochu špeciálne. Nikdy nebudeme mať úplnú istotu, ako hra Dina a Saury prebehla, ale môžeme sa pokúsiť čo najlepšie vymyslieť a najpresnejšie odhadnúť, ako to mohlo dopadnúť. Pripomeniem, že Saura hádzala kockou, kde rovnako často padali čísla od 0 po 5, a Dino takou, kde s rovnakou pravdepodobnosťou padali čísla od 1 po 6. V každom kole vyhral a prasličku zjedol ten, kto hodil väčšie číslo. Keďže Dinova kocka bola lepšia ako Saurina, v prípade remízy tiež vyhrala a jedla Saura. Stačí jej táto pomoc na to, aby mala väčšiu šancu vyhrať ako Dino, alebo nie? A ako dobre vieme z týchto jednoduchých pravidiel predpovedať, koľko prasličiek zjedli? Hlavným výsledkom riešenia tejto úlohy je, že predpovedať to vieme docela dobre.

Jeden spôsob ako na to prísť bolo vyskúšať si ich zápas na 36 kôl naozaj zahrať s kockami. Pokiaľ nemáte doma Saurinu kocku, museli ste každý jej hod zmenšiť o jedna. Pri tomto hádzaní sa dalo všimnúť veľa veci. Naozaj môžu hodiť na kockách aj rovnaké čísla, aj Saurina slabšia kocka vie hodiť viac ako lepšia Dinova, a počas 36 kôl sa vám určite niektoré výsledky (teda koľko hodil Dino a koľko Saura) zopakovali. Po 36 kolách ste dostali nejaký výsledok ich zápasu. Ak ste to skúsili len raz, takmer určite vám ako víťaz vyšiel Dino. Ak viac krát, občas (asi v desatine zápasov) sa podarilo vyhrať aj Saure. Dinova väčšia šanca celkovo vyhrať ale bola jasná. Koľko kto zjedol prasličiek už bolo tažšie určiť. Ak ste vyskúšali len jeden zápas, nejaké počty vám vyšli, ale pri opakovanej hre už mohol byť výsledok iný. Ak ste vyskúšali viac, výsledky zápasov sa niekedy zopakovali, niekedy líšili a vychádzali rôzne skóre. Ako z toho získať čo najlepšiu predpoveď počtu zjedených prasličiek? Na to výborne funguje to, čo matematici často používajú: urobiť priemer prasličiek ktoré zjedol Dino a ktoré Saura. Keď bolo zápasov viac, tieto priemery by sa mali pohybovať okolo 21 a 15.

Ak keď ste si zápas Dina a Saura s kockami nevyskúšali ani raz, úlohu ste tiež mohli správne vyriešiť. Nie je isté, či vás napadli všetky veci, ktoré sa pri skutočnom hádzaní môžu stať, ale mohli ste dostať iný dôležitý nápad. A to poriadne sa pozrieť, aké sú všetky možnosti, čo mohli Saura a Dino v jedno kole hodiť. Veľa z vás preto malo vo svojom riešení podobnú tabuľku, ako vidíte tu. Prvé číslo zodpovedá hodu na Saurinej a druhé na Dinovej kocke. Keďže kocky neboli falošné, každá kombinácia môže padnúť s rovnakou pravdepodobnosťou. Možností je spolu 36, a podľa pravidiel hry sme ich vyfarbili. Modré štvorčeky zodpovedaju Dinovej výhre a je ich spolu 21. Päť zelených „remízových“ a 10 žltých zodpovedá výhre Saury a spolu ich je 15.

0 1	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1
0 2	1 2	2 2	3 2	4 2	5 2
0 3	1 3	2 3	3 3	4 3	5 3
0 4	1 4	2 4	3 4	4 4	5 4
0 5	1 5	2 5	3 5	4 5	5 5
0 6	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6

Týmto číslam je ale treba presne rozumieť. Určite je z nich jasné, že v každom kole má Dino väčšiu pravdepodobnosť výhry ako Saura (on 21 z 36 možností, ona len 15 z 36 možností), a preto má Dino aj väčšiu šancu vyhrať celý zápas na 36 kôl. Ako to ale bude z počtom zjedených prasličiek?

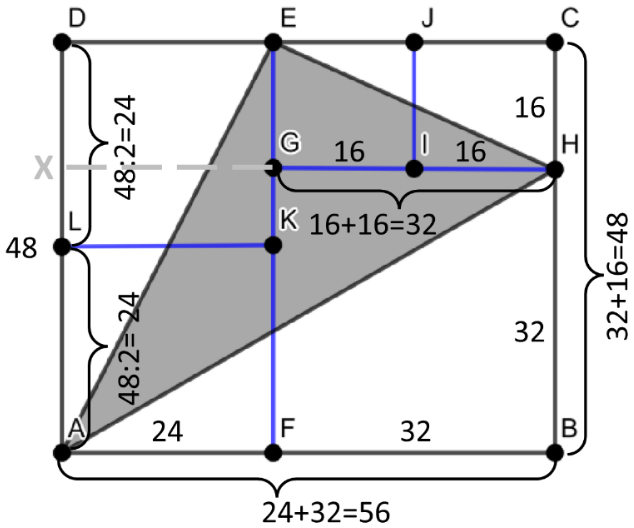
Podľa tejto tabuľky veľa z vás napísalo, že Dino ich teda zje 21 a Saura 15. Niektorí správne upresnili, že to tak bude vtedy, ak sa im v rámci ich 36 kôl podarí hodiť každý výsledok z tejto tabuľky. To sa ale v skutočnosti nepodarí skoro nikdy. A po skutočnom zápase niekedy zjedia 21 a 15 prasličiek, ale veľmi často aj iný počet. Pre úplne správne riešenie bolo treba toto napísať, a úplne správna odpoveď je, že počet zjedených prasličiek bude približne (alebo aj najčastejšie) 21 a 15.

Uznanie patrí všetkým, ktorí túto ťažkú úlohu riešili. Aby sme lepšie rozumeli jej obtiažnosti, pridáme ešte zopár čísiel. Predstavte si, že by sa Dino a Saura na pobrežie vybrali každý deň v roku, a každý deň si zahrali jeden zápas na 36 kôl svojej obľúbenej hry. Ako by to za celý rok roku dopadlo? Dino by ich zápas vyhral približne v 292 dňoch, ale len v 49 z nich by bol výsledok 21:15. V 43 dňoch by zápas vyhrala Saura, a približne 29 dní by skončilo remízou 18:18.

Niektorí písali, že výsledok zápasu je naozaj len náhoda, a mohlo by sa stať, že všetky zápasy vyhrá Dino, alebo všetky Saura. Mohlo by sa to stať, ale to by museli hrať jeden zápas denne nie jeden, ale naozaj strašne vela rokov. Dinovi by sa to podarilo približne v jeden deň za milión rokov, a Saure približne v jeden deň za sto miliárd rokov. A taký zápas, v ktorom by v 36 kolách hodili všetkých 36 kombinácií z tabuľky, a ani jedna sa teda nezopakuje, by sa im podaril približne v jeden deň za bilión rokov. Na to ani dinosauri, ale ani naša planéta a náš vesmír nie sú dosť staré.

Úloha č. 2 *(opravovala Kika Ďuračíková)*

Našou úlohou bolo zistiť obsah trojuholníka **AHE**. Na prvý pohľad nie je jasné, či je tento trojuholník pravouhlý a aké má dĺžky strán. Na obrázku ale môžeme vidieť aj iné trojuholníky – tie biele. Tie sú pravouhlé, takže ak by sme vedeli ich rozmery, vieme vypočítať ich obsah. Obsah sivej časti ostrova s lesíkom potom vypočítame tak, že odčítame obsah bielych častí od plochy celého ostrova.



Poďme najprv zistiť dĺžky vyznačených úsečiek. Zo zadania vieme, že **|GI| = 16 m**. Štvorce **GIJE** a **IHCJ** sú rovnaké, všetky ich strany majú **16 m**. Štvorec **FBHG** má dva krát dlhšiu stranu, teda **32 m**. Strana **BC** sa dá rozložiť na dve časti **BH** a **HC**, a dokopy má **32 + 16 = 48 m**. Strana AD, ktorá leží oproti, má tiež **48 m**. Ležia na nej dva rovnaké štvorce **AFKL** a **LKED**, ktoré majú polovičnú dĺžku strany, teda **48 : 2 = 24 m**. Spodná strana **AB** sa dá rozložiť na dve úsečky **AF** a **FB**, jej dĺžka je **24 + 32 = 56 m**.

Teraz poďme zistiť obsahy bielych trojuholníkov:

- **Δ EHC** je polovicou z obdĺžnika **GHCE**. Jeho obsah je **(16 · 32) : 2 = 256 m²**.
- **Δ AED** je polovicou z obdĺžnika **AFED**. Má obsah **(24 · 48) : 2 = 576 m²**.
- **Δ ABH** je polovicou z obdĺžnika **ABHX** – bod **X** sme si museli dokresliť. Jeho obsah je **(56 · 32) : 2 = 896 m²**.

Plocha celého ostrova je **56 · 48 = 2688 m²**. Plocha lesa **AHE** bude **2688 – 256 – 576 – 896 = 960 m²**.

***Úloha č. 3** (opravovala Maťa Kudelčíková)*

Zo zadania vieme, že hľadáme dve čísla, ktoré nie sú deliteľmi Dinovho čísla. Poďme rozobrať všetky možnosti. Číslo 1 je určite správne, pretože delí všetky prirodzené čísla. Ak by bolo nesprávne číslo 2, Dinovo číslo by určite nebolo deliteľné ani jeho násobkami, čiže žiadnym párnym číslom. Keďže sa pomýlili len dve korytnačky a hneď po sebe, túto možnosť môžeme tiež zavrhnúť. Rovnako je to aj s číslom 3 - ak by Dinovo číslo nebolo deliteľné tromi, nebolo by deliteľné ani jeho násobkami (6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30), ktoré sa vedľa neho nenachádzajú. Podobnou úvahou môžeme vylúčiť všetky čísla po 15, keďže každé z nich má do čísla 31 aspoň jeden násobok:

- Číslo **4** má násobky 8, 12, 16, 20, 24 a 28.
- Číslo **5** má násobky 10, 15, 20, 25 a 30.
- Číslo **6** má násobky 12, 18, 24 a 30.
- Číslo **7** má násobky 14, 21 a 28.
- Číslo **8** má násobky 16 a 24.
- Číslo **9** má násobky 18 a 27.
- Číslo **10** má násobky 20 a 30.
- Čísla **11**, **12**, **13**, **14** a **15** majú len svoj dvojnásobok - 22, 24, 26, 28 a 30.

Žiadne násobky týchto čísel sa vedľa nich nenachádzajú, takže by pri nich nebola splnená podmienka dvoch po sebe idúcich čísel.

Od čísla 16 však už takúto úvahu použiť nemôžeme - jeho dvojnásobok je číslo 32, ktoré korytnačky do piesku už nenapísali. Vieme však, že ak sú dve nesúdeliteľné čísla deliteľmi Dinovho čísla, tak je jeho deliteľom aj ich násobok. Týmto pravidlom skontrolujeme zvyšné čísla:

- Číslo **16** vieme zapísať ako $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, takže tu nevieme použiť vyššie spomenuté pravidlo.
- Číslo **17** je prvočíslo, nevieme ho rozložiť.
- Číslo **18** vieme rozložiť na $2 \cdot 9$. Mohla klamať korytnačka 18? Keďže tieto dva delitele sú nesúdeliteľné (nemajú spoločného deliteľa), a korytnačky 2 a 9 neklamali (klame 18 a jej susedka), môžeme použiť naše pravidlo, a Dinovo číslo je teda deliteľné aj číslom 18.
- Číslo **19** je prvočíslo.
- Číslo **20** vieme rozložiť na $4 \cdot 5$, takže je správne.
- Číslo **21** vieme rozložiť na $3 \cdot 7$, takže je správne.
- Číslo **22** vieme rozložiť na $2 \cdot 11$, tiež je správne.
- Číslo **23** je prvočíslo.
- Číslo **24** vieme rozložiť na $3 \cdot 8$, takže je súčasťou deliteľov Dinovho čísla.
- Číslo **25** vieme rozložiť len na $5 \cdot 5$, takže nevieme o ňom nič povedať.
- Číslo **26** vieme rozložiť na $2 \cdot 13$, takže aj ono delí Dinove číslo.
- Číslo **27** vieme rozložiť len na $3 \cdot 3 \cdot 3$, takže o ňom tiež nevieme nič povedať (neobsahuje nesúdeliteľné delitele).
- Číslo **28** vieme rozložiť na $4 \cdot 7$, takže je správne.
- Číslo **29** je prvočíslo, nevieme o ňom nič povedať.
- Číslo **30** vieme rozložiť na $5 \cdot 6$, takže je deliteľom Dinovho čísla.
- Číslo **31** je prvočíslo.

Po použití pravidla o súčine dvoch nesúdeliteľných deliteľov nám ostanú čísla 16, 17, 19, 23, 25, 27, 29 a 31. Na záver využijeme informáciu, že dve korytnačky, ktoré sa pomýlili, písali do piesku čísla hneď po sebe. Jediné dve čísla idúce za sebou z našich možností sú len **16** a **17**.

Úloha č. 4 (*opravovala Lenka Hudecová****)***

Ujasnime si najskôr, ako vyzerá taká pečiatka. Či už by to bola pečiatka kocková, ako tá naša, alebo obyčajná pečiatka s autíčkom či iným obrázkom, vždy obrázok, ktorý sa otláča, „vytŕča“ nad rovnú plochu pečiatky, aby sme po otlačení pečiatky na papier dostali otlačok obrázka, a nie otlačok všetkého okrem obrázka.

V našom prípade teda musíme z každej steny kocky odobrať malé kocky, ktoré sú **okolo** jednotlivých symbolov (aby symboly „vytŕčali“) a nie malé kocky, ktoré tvoria samotné symboly.

Tento príklad sa dal riešiť dvomi základnými spôsobmi. Jeden je postupne malé kocky odoberať z veľkej kocky zloženej z **7 · 7 · 7 = 343** malých kociek. Tam ale musíme riešiť, že malé kocky na stenách sú spoločné pre 2 susediace steny a malé kocky na rohoch dokonca pre 3 susediace steny.

Druhá, jednoduchšia možnosť je pozrieť sa na to, ako naša pečiatka vyzerá keď je hotová. Je to v podstate kocka z **5 · 5 · 5 = 125** malých kociek, na ktorej sú prilepené malé kocky tvoriace jednotlivé symboly. Týchto prilepených malých kociek je **25**. Spolu teda pečiatku tvorí **125 + 25 = 150** malých kociek.