JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVI. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2022/2023, 1. letná séria

Vzorové riešenia

***Úloha č. 1** (opravovala Baška Marečáková)*

Každý z vás našiel aspoň jedno riešenie pre tento príklad, skúšaním a dopĺňaním čísla do centrálneho modulu sa vám podarilo odhaliť vyvážené usporiadanie športovcov. Pýtali sme sa však na to, aké počty športovcov môžu bývať v moduloch, čiže na všetky možné riešenia.

Číslo v centrálnom module bude v každom zo súčinov, ktoré máme vyvážiť. To znamená, že na rovnosť týchto súčinov nemá vplyv, lebo ak sa dve čísla rovnajú a prenásobíme ich tým istým číslom, stále sa musia rovnať. Môžeme sa teda pozerať len na výsledky násobenia dvojíc v koncových moduloch na každej priamke, ktoré sú tri.

Druhá veľmi dobrá úvaha, ktorú mala väčšina z vás, bola o ukladaní čísel do dvojíc. Vždy musíme mať v dvojici násobené čísla v rovnakom poradí podľa najväčšieho a podľa najmenšie čísla. Ak by sme vymenili najmenšie za druhé najmenšie v poradí, tak násobok je určite väčší ako násobok dvojice s najmenším číslom. Obdobne to funguje aj pre výmenu najväčšieho. Všetky tri súčiny majú šancu byť rovnaké, len ak násobíme najväčšie s najmenším, druhé najväčšie a druhým najmenším atď. (To samozrejme ešte nemusí stačiť, ak by sme miesto 48 mali 47, nevyjde nám nič.)

Teraz môžeme overiť všetky čísla v strede, teda sedem možností a pozrieť sa na výsledky súčinov. Vieme, že nám stačí násobiť len dvojice a tie vytvárame práve jedným spôsobom – postupne podľa poradia najväčšie s najmenším.

Ďalšia možnosť je pozrieť sa na prvočíselný rozklad čísel. Všetky čísla sú len násobky určitého počtu čísel 2 a 3. Preto nakoniec v každej z troch priamok musíme mať na násobenie rovnaký počet 2-ok a 3-ok, pričom číslo v centrálnom module je spoločné pre každú priamku. Tri čísla obsahujú 3-ku dva krát a štyri čísla obsahujú 3-ku raz, čo je spolu desať čísel 3. Aby sme mali vyvážené súčiny, musíme umiestniť do stredu jedno z čísel s jednou 3-kou, a zvyšných deväť 3-ok rozdeliť rovnako do troch priamok po dve a jednu. V každej priamke teda bude vždy jedno číslo s jednou 3-kou a jedno s dvomi 3-kami..

9		$3 \cdot 3$
12	$2 \cdot 2$	3
18	2	$3 \cdot 3$
24	$2 \cdot 2 \cdot 2$	3
36	$2 \cdot 2$	$3 \cdot 3$
48	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	3
96	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	3

Podobne máme spolu na násobenie k dispozícii sedemnásť čísel 2, samozrejme rozdelených do počtov členov výprav. Do stredu preto musíme dať dve alebo päť čísel 2, a zvyšných pätnásť alebo dvanásť 2-ok zase rozdeliť do troch priamok po päť alebo po štyri. Ak po štyri, vtedy je 96 určite v centrálnom module. Zvyšné výsledky súčinov vieme overiť:

$$9 \cdot 48 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ 2 \cdot 3 = 432,$$

$$12 \cdot 36 \ = \ 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 432,$$

$$18 \cdot 24 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 432.$$

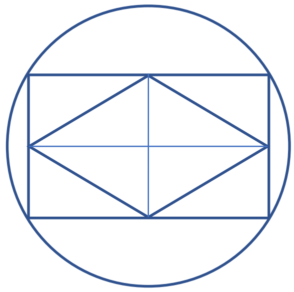
Výsledky súčinov sme vedeli, lebo rozklad na prvočísla majú určite všetky rovnaký.

Ak 96 nebude v centrálnom module, tak musí byť počet 2 v súčine vonkajších dvojíc päť a počet 3 musí byť tri. Vtedy je možné usporiadanie 12 do stredu a do dvojíc je 48 s 18, 24 s 36 a samozrejme 96 s 9. Súčiny musia vychádzať, lebo prvočíselný rozklad súčinov je rovnaký.

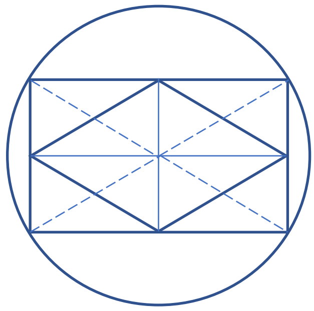
V centrálnom module môže byť 12 alebo 96 športovcov.

Úloha č. 2 (*opravovala Erika Novotná****)***

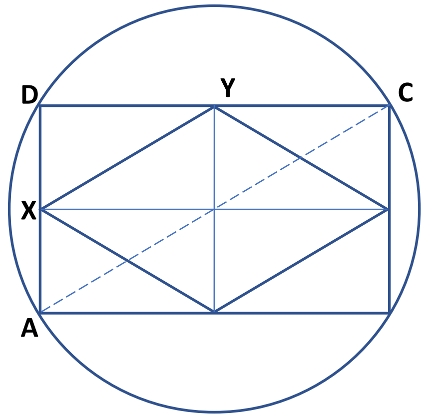
Prvé riešenie: Keď spojíme vrcholy ktoréhokoľvek vnútorného rovnobežníka oboch návrhov so stredom kružnice, vzniknú nám v prvom prípade štyri navzájom zhodné menšie štvorčeky a v druhom prípade štyri navzájom zhodné obdĺžniky. V týchto malých štvorcoch/obdĺžnikoch tvorí strana vnútorného rovnobežníka vždy uhlopriečku (tak ako na obrázku). Útvary, ktorých obvod porovnávame sú teda kosoštvorce.



Keď dokreslíme šrafovanou čiarou druhé uhlopriečky, tak vidíme, že dĺžka každej z nich je zhodná so stranou kosoštvorca (lebo uhlopriečky vo štvorci aj v obdĺžniku majú navzájom rovnaké dĺžky). Zároveň dĺžka štyroch šrafovaných čiar sa rovná hľadanému obvodu tohto kosodĺžnika. Keďže vždy dve malé šrafované uhlopriečky tvoria uhlopriečku veľkého obdĺžnika a súčasne priemer kružnice (10 km), je obvod kosoštvorca rovný $2 \cdot 10$ km = 20 km. Obvody obidvoch bránok sú teda rovnaké.



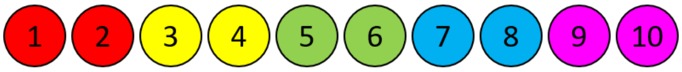
Druhé riešenie: *Keď dokreslíme do ktoréhokoľvek obrázka spojnicu oproti ležiacich vrcholov veľkých obdĺžnikov (napr. bodov A, C), dostaneme takto uhlopriečku štvorca, resp. obdĺžnika, a súčasne aj priemer kružnice. Táto čiara má teda 10 km. Zároveň strana bránky je spojnicou stredou strán obdĺžnika/štvorca. Teda napr. v trojuholníku ACD je strana XY jeho strednou priečkou. Keďže stredná priečka je polovicou strany, jej dĺžka je 5km. Toto platí pre každú stranu bránky, obvod bránky je teda $5 \cdot 4$ = 20 km a obvody obidvoch bránok sú teda rovnaké.*



***Úloha č. 3** (opravoval Jožtek Rajník)*

Predslov. Na začiatok si ujasníme, čo je to vlastne prvočíslo. Prvočísla sú také prirodzené čísla, ktoré majú práve dvoch rôznych deliteľov. Teda jednocifernými prvočíslami sú 2, 3, 5 a 7. Väčšie prvočísla nás v tejto úlohe nezaujímajú, lebo rozdiel dvoch čísel od 1 do 10 môže byť najviac 9.

Niekoľko z vás ofarbilo semafor pomocou 5 farieb. Farby ste priraďovali postupne od 1 po 10 (alebo opačne), pričom novú farbu ste použili len keď to bolo nutné. Teda napr. dvojku ste dali červenú, ale trojku už žltú kvôli jednotke. Skončili ste s ofarbením ako na obrázku.

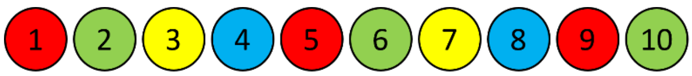


Je však týchto 5 farieb najmenší možný počet? Aj keď to môže vyzerať presvedčivo, je tu predsa pár otázok. Čo ak by sme dvojku dali žltou, aj ak by sme nemuseli? Nemohlo by nám to ušetriť nejaké farby neskôr? Správnu odpoveď vám zatiaľ neprezradíme. Potrebujeme teda ešte prebrať iné možnosti farbenia. Všetky riešenia tejto úlohy sú viac alebo menej o skúšaní rôznych možností. Jednému z vás sa dokonca podarilo vyriešiť úlohu iba skúšaním. Ukážeme si, akými úvahami sa toto skúšanie dalo obmedziť. Aj ako zistiť, či už máme správny počet farieb.

Prvé riešenie. Keďže sa nás úloha pýta na najmenší počet farieb, môžeme začať skúšať počty farieb od najmenších čísel. Isto zvládnete vysvetliť, že jedna farba nám nestačí. Čo tak dve farby, napr. červená a žltá? Povedzme, že číslo 1 je červené (na tom ešte nezáleží). O čísle 2 teraz moc nevieme, môže byť zatiaľ oboch farieb. Pozrieme sa však na číslo, ktorého farba už je jednoznačne určená. Toto bude kľúčová myšlienka tohto riešenia. Napríklad o čísle 3 vieme, že musí byť žlté (lebo $3 - 1 = 2$). Podobne musia byť kvôli jednotke žlté aj čísla 4, 6 a 8. A to je problém, lebo $6 - 3 = 3$, čo je prvočíslo. Dve farby nám teda nestačia.

Ako to bude s tromi farbami? Tiež môžeme začať od jednotky, ktorá bude červená. Už vieme, že čísla 3 a 6 musia mať tiež odlišné farby. Povedzme 3 bude mať žltú farbu a 6 zelenú. Číslo 4 nemôže byť zelené kvôli šestke, tak musí byť žlté. No a pri čísle 8 máme zas problém: Nemôže byť červené (lebo $8 - 1 = 7$), ani žlté (lebo $8 - 3 = 5$), ani zelené (lebo $8 - 6 = 2$). Tým sme ukázali, že ani 3 farby nám nestačia. Všetky tieto dôvody sa dajú zhrnúť nasledovne: Pre čísla 1, 3, 6, 8 platí, že každé dve z nich majú rozdiel prvočíslo. Preto každé z nich musí byť zafarbené inou farbou.

A čo štyri farby? Už vieme, že 1, 3, 6 a 8 musia mať navzájom rôzne farby. Samozrejme, rovnako to platí aj pre štvoricu 2, 4, 7 , 9 a štvoricu 3, 5, 8, 10. Tak zafarbime 1 červenou, 3 žltou, 6 zelenou a 8 modrou. Pre lepší prehľad si môžeme k číslam aj značiť, ktoré farby ešte môžu mať. Teraz najmenej možností majú čísla 5 a 10. Obe môžu byť červené alebo zelené a nemôžu mať rovnakú farbu. Máme pre ne teda dve možnosti. V jednej z nich sa po čase zasekneme. V druhej z nich sa nám už ľahko podarí nájsť nejaké správne ofarbenie so štyrmi farbami. Napríklad také ako na obrázku. Najmenší počet farieb potrebný na zafarbenie semafora sú teda 4 farby.



Existuje veľa spôsobov, ako sa dá prísť na ofarbenie štyrmi farbami. Niektorí ste len tak skúšali, iní ste vymýšľali rôzne postupy a systémy a ďalší zas skúšali nejaké pravidelné ofarbovania. Akurát nie z každého riešenia bolo dobre vidno, prečo by vaše ofarbenie malo mať najmenší počet farieb.

***Druhé riešenie.** Ukážeme si ešte jedno riešenie, ktoré sa objavilo u viacerých riešiteľov. Ak chceme čo najmenší počet farieb, tak chceme mať čo naviac čísel rovnakej farby. Preto si nájdeme skupinky čísel, ktoré môžu mať rovnakú farbu. To vyžaduje istú dávku skúšania. To by ste mali v riešení popísať, aby bolo vidno, že ste na nič nezabudli. Keď si prehľadne zapíšeme, ktoré čísla s ktorými môžu mať rovnakú farbu, tak nám to skúšanie uľahčí. Takto zistíme, že z jednej farby môžeme mať najviac tri čísla. Pritom všetky takéto trojice sú (1, 2, 10), (1, 5, 9), (1, 9, 10) a (2, 6, 10).*

Čo nám to povie o počte farieb? Prvou farbou vieme zafarbiť tri čísla, druhou najviac ďalšie tri a treťou najviac ďalšie tri. Čiže s tromi farbami zafarbíme najviac 9 čísel. Takže na 10 čísel isto potrebujeme aspoň štyri *farby. A teraz aj celkom ľahko také ofarbenie vieme nájsť. Jediné dve trojice, ktoré vieme mať naraz sú (1, 5, 9) a (2, 6, 10). Čísla 1, 5, 9 môžeme teda zafarbiť červenou a 2, 6, 10 žltou. Tu už ľahko zistíme, že zvyšné čísla môžeme dať napr. 3 a 4 zelenou a 7 a 8 modrou. Dokonca pomocou tohto riešenia možno nájsť aj všetky ofarbenia semaforu štyrmi farbami. Vedeli by ste to?*

Úloha č. 4 (**opravoval Adam Kňaze**)

Keď sa prvý krát pustíme do písania článku do Galaktického spravodajcu, pravdepodobne sa pozastavíme nad tým, že v informáciách ktoré máme k dispozícií sa nehovorí nič o konkrétnych zápasoch. Sú tam len nejaké všeobecné pravidlá a finálne výsledky, avšak koľko sa odohralo zápasov, kto hral s kým, a kto vyhral alebo remizoval musíme zistiť sami. Tak poďme na to.

Otázka, ktorá bude našich čitateľov zaujímať najviac je „kto vyhral?“. Podľa zadania sa za výhru v zápase udeľuje pomerne veľa bodov, až 10. Podľa finálnych výsledkov majú Kípery aj Bíteri menej ako 10 bodov (9 a 8) z čoho vieme povedať, že ani raz nevyhrali zápas, a taktiež žiaden nemohol dva krát remizovať (za remízu je 5 bodov). Síkeri mali 14 bodov, takže mohli **maximálne raz vyhrať**, prípadne ešte **raz či dva krát remizovať** a zvyšok dohnať gólmi. Prehrať nemohli, lebo by vtedy niektorý iný tím musel vyhrať, čo sa nestalo.

Poďme vyskúšať jednotlivé možnosti výsledkov pre Síkerov. Ak **raz vyhrali** proti Bíterom alebo Kíperom získali 10 bodov a zvyšné 4 museli dostať za góly. Súperiaci tím im mohol dať 1 až 3 góly. Keďže Síkeri už nemohli hrať ďalší zápas (inak by mali viac ako 14 bodov), jediný ďalší zápas musel byť medzi Bítermi a Kípermi. Ani jeden tím nemohol vyhrať, musela to teda byť remíza po ktorej oba tímy získali rovnako veľa bodov. Kíperi mali na konci o jeden bod viac ako Bíteri a museli ho získať mimo ich spoločného zápasu, takže museli hrať zápas so Síkermi. Jeden zápas teda prebehol medzi Síkermi a Kípermi, pričom Síkeri strelili 4 góly a Kíperi jeden, a získali za to 14 bodov a 1 bod. Teraz zároveň vieme dopočítať aj druhý zápas, ktorý prebehol medzi Kípermi a Bítermi, pričom oba tímy strelili 3 góly a získali po 8 bodov.

Takáto kombinácia výsledkov vyhovuje zadaniu a môžeme napísať článok. Zo zvedavosti však môžeme vyskúšať aj ostatné možnosti pre Síkerov. Keby **dva krát remizovali**, získali by dokopy 10 bodov za remízy, plus by mohli streliť (a zároveň dostať) 1 a 3 alebo 2 a 2 góly. Kíperi a Bíteri už spolu hrať nemohli, lebo by za remízy mali po 10 bodov. Problém nastáva v tom, že Kíperi majú získať celkovo 9 bodov a zo zápasu proti Síkerom mohli získať najviac 8 (5 za remízu plus 3 za góly). Táto možnosť teda nefunguje.

Podľa posledného variantu by Síkeri len **raz remizovali**. Ich súper by však dostal rovnako veľa bodov, teda tiež 14. To nikto iný nemal, môžeme tak aj tento variant vylúčiť. Takže naisto vieme, že vyhovujúca kombinácia výsledkov zápasov ktorú sme našli je jediná možná, a článok môžeme spokojne poslať do tlače.