JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVI. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2022/2023, 2. letná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 *(opravovala Maťka Gaňová)*

Najskôr sa poďme pozrieť na možný priebeh hry, ktorú by vyhrala Svetluška. To nastane v prípade, keď súčin 3 zátvoriek vo výraze je 240. Aby sme zistili, aké hodnoty môžu zátvorky nadobúdať, spravíme si prvočíselný rozklad čísla 240:

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Najmenšie dve čísla, ktoré môžeme do zátvorky vložiť sú 1 a 2, a preto najmenšia možná hodnota jednej zátvorky je 3. Podobne najväčšia hodnota, akú zátvorka môže mať je $5 + 6 = 11$. Preto hľadáme 3 činitele (hodnoty zátvoriek) v rozsahu od 3 do 11, ktorých súčin bude 240.

Z prvočíselného rozkladu rýchlo zistíme, že existujú len 3 možnosti – $3 \cdot 8 \cdot 10$, $4 \cdot 6 \cdot 10$, $5 \cdot 6 \cdot 8$ (skúste sa zamyslieť prečo). Zároveň súčet všetkých čísel v zátvorkách musí byť rovný $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Skontrolujeme, či všetky naše možnosti túto podmienku spĺňajú:

$$3 + 8 + 10 = 21 \qquad \checkmark$$

$$4 + 6 + 10 = 20 \qquad \times$$

$$5 + 6 + 8 = 19 \qquad \times$$

Zostala nám už teda len 1 možnosť, a to $3 \cdot 8 \cdot 10$. Skúsime sa teda pozrieť na to, ako by mohli byť čísla v zátvorkách rozmiestnené. Súčet 3 vieme dostať len ako $1 + 2$ a súčet 10 vieme dostať len ako $4 + 6$. Na poslednú zátvorku tak zostáva $3 + 5$, čo sa skutočne rovná 8.

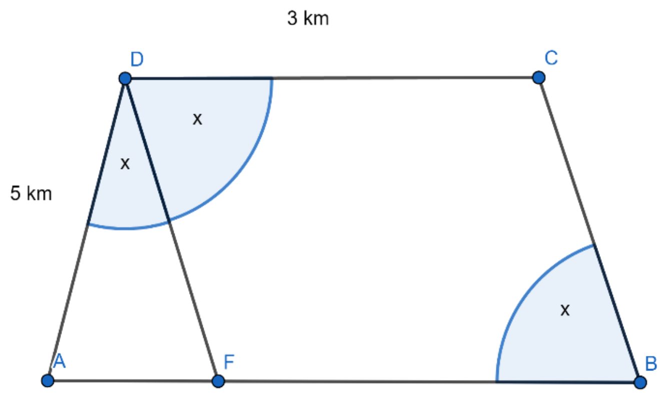
Aby Svetluška vyhrala, na záver hry musia zátvorky vyzerať takto:

$$(1 + 2) \cdot (3 + 5) \cdot (4 + 6)$$

Zátvorky môžu byť taktiež navzájom v inom poradí, pretože na poradí sčítancov/činiteľov pri sčítaní/násobení nezáleží. Keďže Artur začína hru, vyberie si zátvorku, do ktorej položí prvé číslo. Svetluška vie potom po každom jeho ťahu do tej istej zátvorky vždy priložiť také číslo, ktoré jej vyhovuje. Napríklad ak Artur v prvom ťahu položí do prvej zátvorky číslo 5, tak Svetluška doplní do prvej zátvorky číslo 3, a podobne bude pokračovať.

Ak bude **Svetluška** hrať podľa tejto stratégie, tak hru **vždy vyhrá**.

Úloha č. 2 ***(****opravovali Matúš Hladký a Miška Vicáňová****)***



Ako prvé si nakreslíme obrázok a vyznačíme uhly a strany, ktoré poznáme. Keďže obrázok je len ilustračný, jeho veľkosti uhlov a strán sú len orientačné.

Pre začiatok nám pomôže, ak si do obrázka dokreslíme os uhla ADC, a označíme bod, kde táto os pretína úsečku AB ako F. Takto rozdelíme lichobežník ABCD na trojuholník AFD a rovnobežník FBCD. To, že FBCD je rovnobežník však nemusí byť hneď jasné.

Dokázať nám to pomôžu uhly DFA a FDC. Nakoľko v lichobežníku sú základne vždy rovnobežné, tieto uhly sú striedavé, takže majú rovnakú veľkosť. Teraz však vidíme aj to, že uhly DFA a CBA majú rovnakú veľkosť, a keďže tiež majú oba jedno rameno na spoločnej úsečke, musia byť súhlasné. Z toho vieme taktiež usúdiť, že úsečky FD a BC sú rovnobežné, a teda FBCD je rovnobežník. A keďže v rovnobežníku majú rovnobežné strany rovnakú dĺžku, strana FB musí byť rovnako dlhá ako strana CD, čiže má 3 km.

Zaujímavý je však aj trojuholník AFD. Pozorný riešiteľ si všimne, že dva uhly v ňom, konkrétne ADF a DFA majú rovnakú veľkosť. Trojuholník AFD je tým pádom rovnoramenný so základňou DF, a teda ramená AD a AF sú rovnako dlhé. Z toho nám vyplýva, že úsečka AF je dlhá 5 km.

No a napokon stranu AB získame ako súčet úsečiek AF a FB, čo je 5 km + 3 km = 8 km. **Strana AB je teda dlhá 8 kilometrov**.

Poznámka: viacerí ste sa rozhodli túto úlohu riešiť rysovaním obrázka. Táto technika je veľmi pekná, avšak neosvedčuje sa pri geometrických úlohách, nakoľko sa pri nej človek vie veľmi rýchlo a veľakrát pomýliť, čo v konečnom dôsledku pokazí výsledok. Preto odporúčame geometrické úlohy nie (len) rysovať, ale (aj) počítať :)

Úloha č. 3 (*opravovali Ivka Hrivová a Matúš Jonaštík****)***

Postupy riešenia pre obe triedy sú vcelku podobné, začnime ale, tak ako väčšina z Vás, Svetluškinou triedou.

Pozrime sa najprv na to, koľko robotov mohli jednotlivé robotky poznať. Keďže v Svetluškinej triede je 9 robotov, tak každá z 10 robotiek môže poznať najviac 9 robotov. Ak má každá robotka poznať iný počet robotov, tak jedna robotka musí preto poznať 0 robotov, ďalšia 1 robota, ďalšia 2 robotov, … a posledná robotka musí poznať 9 robotov. Iná možnosť nie je.

Teraz si vieme spočítať všetky známosti v Svetluškinej triede, a to ako súčet

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Vieme, že známosti robotov a robotiek sú vzájomné. Preto ak robotky poznajú spolu 45 robotov, tak aj roboti poznajú spolu 45 robotiek.

Zo zadania vieme, že každý robot pozná rovnaký počet robotiek. Keďže je spolu 45 známostí a robotov je v triede 9, každý robot pozná $45 : 9 = 5$ robotiek.

Robotky a roboti sa naozaj mohli v Svetluškinej triede takto poznať, ako konkrétne, si môžete skúsiť navrhnúť doma aj vy, keď použijete informácie o triede, na ktoré sme už spolu prišli.

Podobný postup aplikujeme aj v Arturovej triede. V triede je 10 robotov, preto každá z 11 robotiek môže poznať najviac 10 robotov. Ak má každá poznať iný počet robotov, tak jedna musí poznať 0 robotov, ďalšia 1 robota, ďalšia 2 robotov, … a posledná robotka musí poznať 10 robotov. Iná možnosť nie je.

V Arturovej triede je preto

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

známostí, teda všetci roboti spolu poznajú 55 robotiek.

Ak má každý robot poznať rovnaký počet robotiek, tak by musel poznať $55 : 10 = 5{,}5$ robota, čo očividne nemôže nastať. **Preto sa Artur mýli.**

***Úloha č. 4** (opravovali Miro Hudec a Lenka Hudecová)*

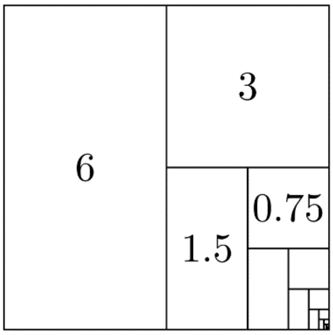
Začnime s tým, že sa pozrieme, čo sa stane, keď spravíme jeden krok (okrem kroku 1, ktorý je špeciálny). Na každú stranu dovtedy najmenšieho trojuholníka prilepíme nový, ktorý ma stranu polovičnej dĺžky. Časť strany, kde sa trojuholníky dotýkajú, sa do obvodu už nepočíta, nakoľko je už vo vnútri základne. Musíme teda túto dĺžku z obvodu odpočítať. Zároveň sme ale do obvodu pridali dve strany takej istej dĺžky. Ku každej strane pôvodného trojuholníka sme teda pridali plot dlhý ako polovica strany tohto trojuholníka, a teda k celkovému obvodu základne sme pridali 3-krát (lebo toto spravíme na každej strane najmenšieho trojuholníka) polovicu dovtedy najkratšej strany. Keď tento postup zopakujeme viackrát, vidíme nasledovný výsledok:

Krok	1	2	3	4	5
Najkratšia strana po ukončení kroku	2 km	1 km	0,5 km	0,25 km	0,125 km
Celkový obvod	6 km	$6 + 3 \cdot 2 : 2 =$ 9 km	$9 + 3 \cdot 1 : 2 =$ 10,5 km	$10{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 : 2 =$ 11,25 km	$11{,}25 + 3 \cdot 0{,}25 : 2 =$ 11,625 km

Prvá trieda teda splní svoju úlohu po piatich krokoch a základňa bude mať obvod 11,625 km.

Pri druhej triede to bude trochu náročnejšie. Všimnime si dĺžku plota, ktorá pribudne v každom kroku:

Krok	1	2	3	4	5
Celkový obvod	6 km	9 km	10,5 km	11,25 km	11,625 km
Rozdiel	6 km	3 km	1,5 km	0,75 km	0,375 km



V každom kroku teda pridáme o polovicu menej pletiva ako v predchádzajúcom kroku. Potrebujeme teda zistiť, koľkokrát musíme pridať polovicu predchádzajúceho rozdielu, aby sme dosiahli 12,5 km.

Vieme si pomôcť obrázkom. Vezmime si štvorec, ktorého obsah je 12. Keď sa ho pokúšame vyplniť menšími obdĺžnikmi, o ktorých platí, že každý ďalší má polovičnú plochu predchádzajúceho, vždy nám ostane rovnako malý (aj keď stále zmenšujúci sa) kúsok, ktorý vieme opäť rozdeliť na polovicu. Takto vieme postupovať donekonečna, no nikdy sa nám nepodarí dosiahnuť ani len obvod 12.

Druhá trieda teda nikdy nedokáže vytvoriť základňu s plotom dlhším ako 12,5 km.