JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XVII. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG

S E Z A M K O, Školský rok 2022/2023, 2. letná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 **(***opravovala Ika Bachratá***)**

Na tejto úlohe bolo najťažšie vysvetliť, že sú to už naozaj všetky riešenia. A tak isto mať dobrý systém, aby ste niektorý kváder nezapísali dvakrát v nejakej pretočenej polohe. Veľa z vás vedelo, že to vysvetľovať treba, ale úplne nepriestrelne sa to podarilo vysvetliť len niektorým. Vzorové riešenie je napísané podľa jedného z nich (ďakujem A.N.).

Najskôr si skúsim pohľadať všetky kvádre, ktoré majú výšku 1. Postupne budem skúšať šírku od 1 a dopočítam dĺžku:

$$1 \cdot 1 \cdot 60$$
$$1 \cdot 2 \cdot 30$$
$$1 \cdot 3 \cdot 20$$
$$1 \cdot 4 \cdot 15$$
$$1 \cdot 5 \cdot 12$$
$$1 \cdot 6 \cdot 10$$

Šírka 7 sa nedá, pretože 60 nie je deliteľné 7. Rovnako sa nedá 8 a 9. Keď zoberieme 10, tak dostaneme 1·10·6 a to už máme ako 1·6·10. Ďalej nemusíme pokračovať, lebo by sme dostali to čo už máme. Teraz budeme hľadať výšku 2:

$2 \cdot 1 \cdot 30$ už máme.
$2 \cdot 2 \cdot 15$
$2 \cdot 3 \cdot 10$
$2 \cdot 4$ sa nedá, lebo 60 nie je deliteľné 8
$2 \cdot 5 \cdot 6$
$2 \cdot 6 \cdot 5$ už máme tiež

Znova už nemusíme pokračovať, lebo sa nám budú opakovať tie isté kvádre. Ďalej hľadáme výšku 3:

$3 \cdot 1 \cdot 20$ už máme
$3 \cdot 2 \cdot 10$ už tiež máme
$3 \cdot 3$ sa nedá, lebo 60 nie je deliteľné 9
$3 \cdot 4 \cdot 5$
$3 \cdot 5 \cdot 4$ už máme

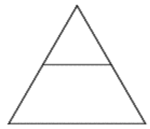
Ďalej už skúšať nemusíme, lebo sa budú opakovať čísla, ktoré už máme. Tým pádom sme našli všetky kvádre, ktoré majú ako výšku, šírku alebo dĺžku aspoň raz aspoň jedno z čísel 1, 2, 3. Na iné kvádre potrebujeme aspoň $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ kociek, takže nám na ne 60 kociek už nestačí.

Z kociek sa teda dá poskladať 10 rôznych kvádrov, ktoré sme už všetky vypísali.

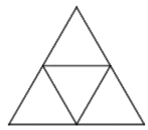
Úloha č. 2 (**opravovala Števka Glevitzká**)

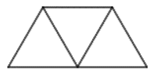
Už na prvý pohľad je celý útvar pekne symetrický, a to podľa osí strán veľkého trojuholníka. Preto sú vrcholy stredného šedého trojuholníka v stredoch strán zvyšných šedých trojuholníkov. To sa dalo využiť a všimnúť si, že každý biely kúsok je akoby „spodná polovička“ trojuholníka, ktorý je zhodný so šedými.

Čo presne sa tým myslí? Zoberme trojuholník zhodný so šedými. Vyznačme stredy dvoch jeho strán a spojme ich úsečkou. Vznikne tak jeden menší trojuholníček a zvyšná časť bude zhodná s bielymi časťami zo zadania.



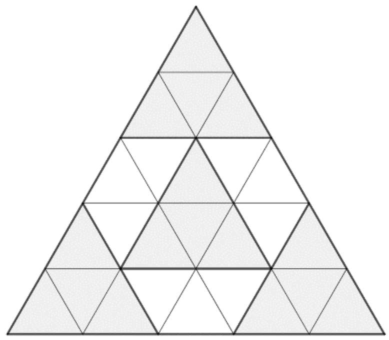
Avšak je jedno, ktoré dve strany si zvolíme. Skúsme to teda pre všetky dvojice. Výsledok môžete vidieť na obrázku – trojuholník sa rozdelil na štyri menšie trojuholníčky. Tie sú všetky zhodné (a majú stranu polovičnej dĺžky). Teda každý šedý trojuholník sa dá rozdeliť na štyri menšie zhodné. A o bielych častiach už vieme, že vznikli zo šedých odobraním jedného trojuholníčka. Preto ich vieme rozdeliť na tri rovnako veľké trojuholníčky (tak ako na obrázku).





Rozdeľme takto všetky kúsky útvaru zo zadania. Máme tam štyri šedé trojuholníky – – tie majú po štyri malé trojuholníčky, a teda spolu je ich 16. Ďalej máme tri biele časti – každá obsahuje po tri malé trojuholníčky, a tak je ich spolu 9. Dokopy tak vo veľkom trojuholníku je 25 malých zhodných trojuholníčkov.

A keďže z nich je 16 v šedej časti, tak šedá časť zaberá 16/24 plochy veľkého trojuholníka. Inak povedané, šedá časť tvorí 64% celej plochy.



Úloha č. 3 *(opravoval Hynek Bachratý)*

Táto úloha nebola najľahšia, ale takmer všetci, ktorí ste sa do nej pustili, našli správnu odpoveď (za čo máte veľkú pochvalu). Preto začneme s ňou.

Na začiatku niesla Saura 6kg piesku a Dino 4kg. Vidíme, že je to spolu presne 10kg. Po presypaní mala zostať Saure tretina jej pôvodného nákladu, teda 6/3 = 2 kg. A Dino mal mať dvakrát viac, teda $2 \cdot 4 = 8$ kg. Vidíme, že spolu je to zase celých 10 kg, čo je podmienka, ktorá musí byť splnená. Zároveň ale treba aj skontrolovať, že k tejto zmene môže dôjsť presypaním piesku zo Saurinho do Dinovho batôžku. A to je tiež v poriadku, lebo vidíme, že Saure ubudli $6 - 2 = 4$ kg, a presne toľko, teda $8 - 4 = 4$ kg pribudli Dinovi. Na túto kontrolu netreba zabudnúť, lebo z prvej kontroly na súčet 10 automaticky nevyplýva.

O dosť zložitejšie ale bolo správne zdôvodniť, že okrem rozdelenia piesku na 6 a 4 kg už žiadne ďalšie rozdelenie podmienkam úlohy nevyhovuje. (Pokiaľ to nevysvetlíme, nemôžeme si byť istý, že sme našli všetky riešenia. A Saura s Dinom by sa mohli čudovať, prečo píšeme, že mali 6 a 4 kilá piesku, keď v batôžkoch mali v skutočnosti iné, tiež správne množstvá piesku.)

Väčšina z vás to vysvetlovala tak, že skúšali aj iné rozdelenia a pre ne ukázali, že nesplnia podmienky zadania. Napríklad, ak by mala Saura na začiaku 9 a Dino 1 kilo, potom na konci by mala mať Saura 3 a Dino 2 kilá, čo spolu nedáva 10. Alebo napríklad ak Saura začala so 7,5 kg a Dino s 2,5 kg, po výmene by mali mať $7{,}5/3 = 2{,}5$ kg a $2{,}5 \cdot 2 = 5$ kg. To tiež nie je spolu 10. A tiež Saure ubudlo 5 a Dinovi pribudlo 2,5 kilo, takže takto sa to nedá zmeniť presypaním.

Druhý príklad 7,5 kg a 2,5 kg zároveň naznačuje, v čom bola najväčšia nepresnosť týchto vysvetlení. Niektorí skúšali len možnosti, kde mala Saura na začiatku 3, 6 alebo 9 kíl, lebo tie čísla sa dajú dobre rozdeliť na tretiny. Dajú, ale na tretiny viem rozdeliť aj každé iné množstvo piesku v Saurinom batôžku. Ak si vyrobím dobré trojramenné váhy, tak môžem piesok rozdeliť aj naozaj. A keď to chcem vymyslieť a vysvetliť matematicky, treba použiť desatinné čísla alebo ešte lepšie ***zlomky***. Preto tiež na úplne správne riešenie nestačilo, ani keď ste vyskúšali všetky možné, ale len celočíslené rozdelenia piesku od 9 a 1 po 1 a 9 kilo. Veď skontrolovať treba aj prípad, keď na začiatku mala Saura napr. 19/3 kg a Dino 11/3 kg.

Ako teda zdôvodniť riešenie úplne presne? Niektorí si pomohli rovnicami. Ak na začiatku mala Saura ***S*** kilo a Dino ***D*** kilo, potom musí platiť, že $\boldsymbol{S + D = 10}$, a po presypaní musí platiť $\boldsymbol{S/3 + 2 \cdot D = 10}$. Z toho sa dá dopočítať, že $\boldsymbol{S = 6}$ a $\boldsymbol{D = 4}$.

Najkrajšia bola ale táto úvaha. Keďže Saurin piesok sa bude deliť na tretiny, bude výhodné označiť si ho pomocou troch menších rovnakých častí. Teda na začiatku platí $\boldsymbol{S = s + s + s}$. Dinovi potom presype dve tretiny, teda $\boldsymbol{s + s}$ kilo piesku. Keďže sa tým ale Dinov piesok zdvojnásobí, tak Dino mal už na začiatku $\boldsymbol{s + s}$ kilo piesku. Na začiatku teda mali Saura $\boldsymbol{s + s + s}$ a Dino $\boldsymbol{s + s}$ kilo piesku. A po presypaní Saura $\boldsymbol{s}$ a Dino $\boldsymbol{s + s + s + s}$ kilo piesku. V oboch prípadoch je to ale spolu $\boldsymbol{5 \cdot s = 10}$ kilo piesku, a teda $\boldsymbol{s = 2}$ kilo. Z toho si už ľahko dopočítame všetky ďalšie potrebné čísla.

Začiatok	Saura S	**s**	**s**	**s**		Dino D	**s**	**s**		
Koniec	Saura S	**s**				Dino D	**s**	**s**	**s**	**s**

***Úloha č. 4** (opravovala Iva Jančigová)*

Na rozšifrovanie kódu ENIGMA mali Dino a Saura tri podmienky pre jednotlivé číslice:

$$M - N = E$$
$$E + I > M + N$$
$$G \cdot I = A$$

Aj keď sú podmienky napísané v konkrétnom poradí, my ich nemusíme v tomto poradí použiť. Oplatí sa začať poslednou podmienkou, pretože nie je veľa možností, ktoré číslice by sa v nej mohli nachádzať. Určite ani jedno z písmen A, I, G nemôže reprezentovať číslicu 1, pretože potom by sa nám nejaká číslica musela zopakovať (napr. $5 \cdot 1 = 5$), ale v zadaní sa píše, že každá z číslic 1 až 6 je použitá práve raz.

G a I môžu byť najviac 3, lebo ak by jedno z týchto dvoch písmen bolo 4 (alebo viac) a jednotka sa v tejto podmienke nemôže použiť, tak dostávame súčin $2 \cdot 4 = 8$ (alebo viac), čo je príliš veľa. Z toho vyplýva, že tretia podmienka je $2 \cdot 3 = 6$ alebo $3 \cdot 2 = 6$, čiže $\boldsymbol{A = 6}$ a písmená G a I sú 2 a 3, ale nevieme zatiaľ, ktoré je ktoré.

Ostali nám nepoužité číslice 1, 4, 5 a nerozlúštené písmená M, N, E. Tieto písmená spája prvá podmienka, z ktorej vidíme, že M je najväčšie z tejto trojice, čiže $\boldsymbol{M = 5.}$ Písmená N a E sú 1 a 5, ale nevieme zatiaľ, ktoré je ktoré.

Teraz máme niekoľko možností, ako využiť druhú podmienku. Pozrieme sa na dve z nich:

- Na pravej strane druhej podmienky máme súčet aspoň 6 (lebo $M = 5$). Takže potrebujeme, aby $E + I$ bolo aspoň 7. Číslice 6 a 5 sú už obsadené, čiže jediný spôsob, ako sa dá súčet 7 dosiahnuť je $4 + 3$. Teda dostávame $\boldsymbol{E = 4}$ a $\boldsymbol{I = 3}$. Potom už musí byť $\boldsymbol{G = 2}$ a $\boldsymbol{N = 1}$.
- Môžeme si systematicky vypísať, aké možnosti nám ešte ostávajú a pre každú z nich overiť druhú podmienku:
  - $G = 2, I = 3, N = 4, E = 1$: $1 + 3 > 5 + 4$ neplatí
  - $\boldsymbol{G = 2, I = 3, N = 1, E = 4}$: $4 + 3 > 5 + 1$ platí
  - $G = 3, I = 2, N = 4, E = 1$: $1 + 2 > 5 + 4$ neplatí
  - $G = 3, I = 2, N = 1, E = 4$: $4 + 2 > 5 + 1$ tesne, ale neplatí

Jediný možný ENIGMA kód na otvorenie truhlice je teda 413256.

<u>A čo v truhlici po jej otvorení našli?</u>

Podľa Matúša Č., Agátky H., Rasťa H., Ley K., Zuzky K., Elenky M. a Zuzky N., ktorí/é odpovedali aj na túto nepovinnú otázku zo zadaní, tam bolo toto všetko (musela to byt zvnútra riadne veľká truhlica):

Staré mince, zlato, diamanty, temná šachta s rebríkom, správny postup, ako prísť ku kódu (vzorové riešenie), elektrická gitara s príslušenstvom, pozvánka na sústredenie Sezamka, bazuka a rakety do nej a kúsky mapy, na ktorých na prvý pohľad nič nebolo, ale keď ich Dino so Saurou poskladali, tak sa na nej začalo niečo meniť a objavila sa mapa.

Za odpovede ďakujeme a všetkým vám prajeme, aby ste tiež našli pozvánku na sústredenie Sezamka. Myslíme si, že sa tam onedlho uvidíme.