JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVI. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2022/2023, 3. letná séria

Vzorové riešenia

Úloha č. 1 *(opravovali Vierka Glevitzká a Matej Halama)*

Zo zadania vieme, že Artur sa pomýlil o 1 svetlometer práve v jeden deň. To spôsobilo, že v posledný 2023. deň mal Artur zapísaných o 987 svetlometrov viac ako by mal mať. Chceme zistiť v ktorý deň sa pomýlil, no nevieme, ako sa tento omyl prejaví na ďalších dňoch. Skúsme preto niekde spraviť chybu a pozrieť sa na to, čo sa stane.

Pomýľme sa napr. v treťom dni letu:

Správne	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
S chybou	1	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322
Rozdiel			1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Môžeme si všimnúť, že rozdiely medzi správnym a chybným zápisom vytvárajú ďalšiu postupnosť v tvare 1, 1, 2, 3, 5, ... Bude to tak ale iba keď sa pomýlili v tretí deň alebo aj niekedy inokedy?

Skúsme to teda ešte raz a pomýľme sa napr. v piatom dni:

Správne	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
S chybou	1	1	2	3	6	9	15	24	39	63	102	165	267
Rozdiel					1	1	2	3	5	8	13	21	34

Aj teraz sa nám táto postupnosť vytvorila. Vieme, že každý deň preleteli toľko svetlometrov ako predošlé dva dni dohromady. Keď sa teda Artur pomýlil v piaty deň, tak v šiesty deň by podľa jeho zápiskov prešli 3 + 6 = 9 svetlometrov. Sčítal pritom správny počet (s nulovou chybou) s počtom, ktorý bol o 1 väčší, ako mal byť. Preto bolo Arturove číslo aj v druhý deň o 1 väčšie ako malo byť. Keď sčítame dve čísla, ktoré sú o 1 väčšie, tak dostaneme číslo o 2 väčšie (chybný počet v siedmy deň). **Chyba, ktorá sa nachádza v jednotlivých dňoch sa teda sčítava rovnako, ako pôvodná postupnosť.**

Pozrime sa, v ktorý deň od pomýlenia bude rozdiel 987 (začiatok postupnosti už vypísaný máme a preto nám stačí iba pokračovať ďalej):

1. deň	2. deň	3. deň	4. deň	5. deň	6. deň	7. deň	8. deň
1	1	2	3	5	8	13	21

9. deň	10. deň	11. deň	12. deň	13. deň	14. deň	15. deň	16. deň
34	55	89	144	233	377	610	987

Posledný 2023. deň cesty nám predstavuje 16. deň v našej tabuľke, pričom prvý deň v tabuľke je deň, kedy sa Artur pomýlil. **Z toho vyplýva, že sa Artur pomýlil v 2008. deň cesty.**

Úloha č. 2 **(***opravovali Hynek Bachratý a Alica Cimráková***)**

Táto geometrická úloha bola pekná, a ani jej riešenie nebolo príliš zložité. Myslím, že skoro každého potešila.

Na začiatku bolo dobré uvedomiť si dve veci: Pravidelný šesťuholník je vytvorený (alebo sa skladá) zo **6 rovnakých rovnostranných trojuholníkov** so spoločným vrcholom, ktorý je stredom šesťuholníka. (Ďalšie jeho vlastnosti pri tejto úlohe nie sú až také dôležité). A z jeho umiestnenia v štvorci vyplýva, že **strana týchto trojuholníkov je 1/2 strany štvorca**. Tieto vlastnosti sa dajú aj podrobnejšie zdôvodniť, čo aj niektorí spravili, pochvala. Sú ale z obrázku dosť jasné a vo vašich riešeniach sme ich nevyžadovali.

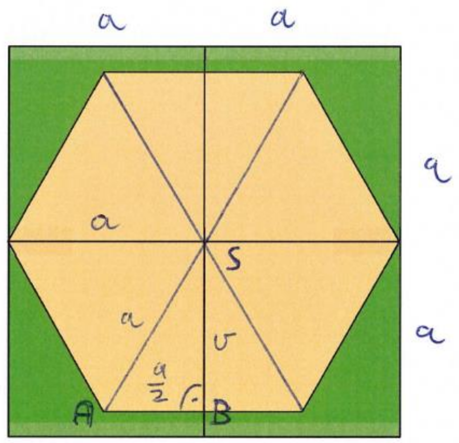
Pre ďalší výpočet bolo najjednoduchšie označiť písmenom $\boldsymbol{a}$ stranu šesťuholníka, a teda aj jeho trojuholníkov. Štvorec má potom stranu $\boldsymbol{2a}$ a plochu $\boldsymbol{2a \cdot 2a = 4a^2}$.

To bola ľahšia časť. Teraz potrebujeme vypočítať plochu šesťuholníka, čo je ale šesťnásobok plochy jedného jeho trojuholníka. K jej zisteniu potrebujeme okrem strany $\boldsymbol{a}$ poznať aj výšku $\boldsymbol{v}$ tohto trojuholníka. K tomu nám pomôže Pytagorova veta, na ktorú sme nenápadne upozornili v zadaní. V trojuholníku ABS podľa nej platí

$$\boldsymbol{(a/2)^2 + v^2 = a^2 .}$$

Pre poriadok poriadne dopočítame: $\boldsymbol{a^2/4 + v^2 = a^2,}$ z toho $\boldsymbol{v^2 = (3/4) \cdot a^2}$ a nakoniec

$$\boldsymbol{v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot a}$$



Teraz už ľahko dopočítame plochu šesťuholníka

$$\boldsymbol{6 \cdot \frac{a \cdot v}{2} = \frac{6}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot a = \frac{6}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}$$

A nakoniec odpovieme na otázku, akú časť štvorca zaberá šesťuholník. K tomu stačí ich plochy vydeliť, a teda dopočítať

$$\boldsymbol{\frac{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{4 \cdot a^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{8}}$$

Čo sa dá aj zaokrúhliť na **0,649519052838329** alebo ešte viac približne povedzme na **64,95%.**

Teraz upozorníme na dve dôležité veci. Ako ste si všimli, v našom výpočte sme nepoužili žiadny konkrétny rozmer trojuholníka alebo štvorca, ktorý ani nebol v zadaní. Miesto toho sme stranu trojuholníka označili písmenkom $\boldsymbol{a}$, ktorého hodnotu vlastne ani nepoznáme. Na konci výpočtu sa nám ale $\boldsymbol{a}$ (presnejšie $\boldsymbol{a^2}$) z výsledku vykrátilo, a teda výpočet aj **výsledný pomer je rovnaký pre každý rozmer** červích dier. Pokiaľ ste pre výpočet použili konkrétnu hodnotu niektorého rozmeru, váš výpočet nie je úplne všeobecný a nemáme (úplnú) istotu, že pre iný rozmer dostaneme rovnaký výsledok.

Druhá vec je, že sme sa počas výpočtu nezbavovali ani zlomkov, a ani odmocniny. Na desatinné číslo sme výsledok prepočítali až úplne na konci. Porozmýšľajte, **ako presný je takýto prepočet**. Stačí na to kalkulačka s viac desatinnými miestami, alebo nám ani tá nepomôže? Ak nie sú tieto prepočty (alebo zaokrúhlenie) presné, vo výsledku môže byť chyba, ktorá sa ešte zväčší, ak zaokrúhlenie spravíte už počas výpočtu a nie až na záver. A to by nám mohlo pri plánovaní vesmírnych ciest spôsobiť vážnejšie problémy...

Úloha č. 3 (*opravovali Maťa Kudelčíková)*

Našou úlohou bolo nájsť všetky možné trojciferné počty hviezd troch hviezdokôp, ktoré sú v pomere 1 : 3 : 5, pričom každé číslo od 1 po 9 je v nich použité práve raz. Na začiatok si môžeme uvedomiť, že druhá hviezdokopa bude tým pádom deliteľná číslom 3 a tretia hviezdokopa bude deliteľná číslom 5.

Veľa z vás si všimlo, že pre jednotlivé cifry hviezdokôp platia nejaké pravidlá. Poďme sa teda na ne postupne pozrieť.

Začnime treťou (najväčšou) hviezdokopou. Toto číslo musí byť podľa zadania 5-násobok najmenšieho hľadaného čísla. Keďže je deliteľné číslom 5, jeho posledná cifra musí byť 0 alebo 5. Číslo 0 však nemáme povolené (uvažujeme len čísla od 1 do 9), takže vieme naisto povedať, že posledná cifra najväčšieho čísla bude **5**.

Poďme sa teraz pozrieť na prvú (najmenšiu) hviezdokopu. Prvá cifra v tomto čísle musí byť **1**. Ak by bola prvá cifra 2, tak potom tretia hviezdokopa (najväčšie číslo) by bola minimálne 213 · 5 = 1065, čiže štvorciferná. Všetky tri čísla musia byť trojciferné, takže zvyšné čísla pre túto cifru môžeme vylúčiť.

Presuňme sa na poslednú cifru prvej hviezdokopy. Ak by prvá hviezdokopa končila na párne číslo (2, 4, 6, 8), po vynásobení číslom 5 by tretia hviezdokopa končila číslom 0 - čo sme už vylúčili.

Posledná cifra nemôže byť ani číslo 1 a ani číslo 5, keďže tieto čísla sme už použili. Zostávajú nám už teda len možnosti 3, 7 a 9.

Keď ich vynásobíme 3 a 5 (pomermi druhej a tretej hviezdokopy), dostaneme:

- 3 · 3 = 9 - v poriadku, číslo 9 sme ešte nepoužili
  3 · 5 = 15.
- 7 · 3 = 21 - nie je v poriadku, posledná cifra druhej hviezdokopy (trojnásobku prvej) by končila číslom 1, ktoré sme už použili
  7 · 5 = 35
- 9 · 3 = 27 - v poriadku, číslo 7 sme ešte nepoužili
  9 · 5 = 45

Takže posledná cifra prvej hviezdokopy môže byť **3** alebo **9**. Veľa možností nám už neostáva, poďme sa teda pozrieť ako to vyzerá pre jednotlivé prípady:

12**3** · 3 = **3**69 - číslica 3 je tu použitá 2-krát
1**4**3 · 3 = **4**29 - číslica 4 je tu použitá 2-krát
16**3** · 3 = 4**8**9, 163 · 5 = **81**5 - číslice 1 a 8 sú tu použité 2-krát
173 · 3 = 5**1**9 - číslica 1 je tu použitá 2-krát
183 · 3 = **5**4**9**, 183 · 5 = **915** - číslice 1, 5 a 9 sú tu použité 2-krát
1**9**3 · 3 = 57**9** - číslica 9 je tu použitá 2-krát
129 · 3 = 387, 129 · 5 = 645 - vyhovuje zadaniu
139 · 3 = 4**1**7 - číslica 1 je tu použitá 2-krát
1**4**9 · 3 = **44**7 - číslica 4 je tu použitá 3-krát
169 · 3 = 5**0**7 - číslicu 0 nemôžeme použiť
1**7**9 · 3 = 53**7** - číslica 7 je tu použitá 2-krát
18**9** · 3 = **5**67, 189 · 5 = **9**4**5** číslice 5 a 9 sú tu použité 2-krát

Týmto sme pokryli všetky možnosti a ukázali, že jediný správny počet hviezd v hviezdokopách je **129, 387 a 645.**

Úloha č. 4 (*opravovala Kačka Bachratá****)***

Zadanie tejto úlohy nám raz porozprával náš kamarát Feri, ktorý je profesorom vo Francúzku. Hovoril, že debatou o tejto úlohe strávili niekoľko obedných prestávok a rozhádali sa na nej mnohí jeho kolegovia. To píšem, pretože tá úloha vôbec nie je jednoduchá a vlastne aj zadanie dovoľuje pomerne veľa scenárov, podľa ktorých sa môže populácia modliviek vyvíjať. A som veľmi pyšná na riešiteľov Sezamu, ktorí odhalili netušené možnosti vývoja populácie modliviek, čo sa týka časov, kedy sa rodia, aj rozhodnutí, kedy s rodením prestanú, keď sa rozhodnúť môžu.

Napriek sledovaniu vývoja v rodinách modliviek si nakoniec väčšina z vás uvedomila, že to, či sa narodí samček alebo samička, je rovnako pravdepodobné, a preto v záznamoch v matrike na planéte M11 bude **približne rovnako veľa samčekov a samičiek**. Body za správny postup dostali tí, čo urobili túto úvahu, aj tí, ktorí urobili experiment, v ktorom s náhodou pri výbere samčeka alebo samičky počítali. Najväčšie bodové straty boli v riešeniach, kde riešitelia tvrdili, že keď je pravdepodobnosť rovnaká, tak sa každej skupine desiatich modliviek narodí 5 samčekov a 5 samičiek. Tak náhoda nefunguje. Iba niekedy. Ale nie príliš často. Nakoniec aspoň nejaká múdra veta bola v každom riešení, takže bodov bolo dosť veľa.