JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVII. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2023/2024, 1. zimná séria

Vzorové riešenia

***Úloha č. 1** (opravovala Vierka Glevitzká a Matej Halama)*

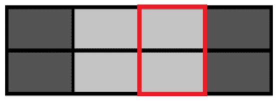
Chceme nájsť všetky možnosti, ako sa dá perník nakrájať na rovnaké obdĺžnikové kúsky tak, aby ich mala Klára aj Peter rovnako. Ocino zje rohové kúsky, ktoré sú vždy štyri, Klára dostane okrajové kúsky a Peter dostane stredové kúsky.

Bolo by super, keby sme si našli nejaký systém alebo spôsob, ktorým budeme preverovať jednotlivé možnosti. To nám pomôže, aby sme žiadne možnosti neprehliadli alebo nevynechali a aby sme si mohli byť istí, že sme našli naozaj všetky.

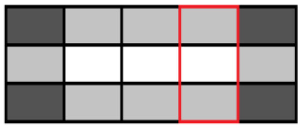
Nakrájaný koláč si môžeme predstaviť ako tabuľku s riadkami a stĺpcami. Ak je teda koláč nakrájaný na 3x5, tak to bude pre nás znamenať, že sme koláč nakrájali na 3 riadky a 5 stĺpcov.

Začnime teda od tých možností, kde je perník nakrájaný na najmenej kúskov. Vieme, že perník má vždy 4 rohové kúsky, takže môže byť nakrájaný na najmenej 4 kúsky, teda na 2x2. V tomto prípade je dokonca perník nakrájaný spravodlivo. Keďže neexistujú žiadne okrajové a ani stredové kúsky, tak Klára a Peter dostanú rovnako (0 kúskov) a ocino zje celý perník.

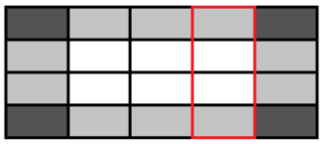
Zväčšime trochu počet stĺpcov a perník nakrájajme na 2x3. Teraz dostane Klára 2 kúsky, zatiaľ čo Peter nedostane žiaden. Čo ak perník nakrájame na viac stĺpcov? Peter znova nič nedostane, lebo tam nebudú žiadne stredové kúsky. Teda ak perník nakrájame na 2 riadky a aspoň 3 stĺpce, tak sa pre Petra nenájdu žiadne stredové kúsky a bude to nespravodlivé. Podobne, ak nakrájame koláč na 2 stĺpce a aspoň 3 riadky, tak sa Petrovi žiadne kúsky neujdú, zatiaľ čo Klára ich bude mať aspoň dva. Ide o tú istú situáciu, iba otočenú o 90°.



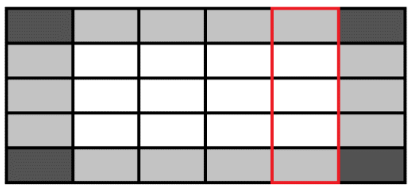
Ďalšia možnosť by bola 3x3. Peter by mal iba 1 kúsok, zatiaľ čo Klára by mala až 4. Ak by sme ale pridali jeden stĺpec, tak by Peter dostal 2 kúsky a Klára 6 kúskov. Pridaním ďalšieho stĺpca dostane Klára ďalšie 2 kúsky navyše, zatiaľ čo Petrovi pribudne iba 1. Keď teda pridáme ďalší stĺpec, tak v koláči pribudne 1 stredový a 2 okrajové kúsky. Preto bude mať Klára stále iba viac a viac kúskov ako Peter a nikdy nebudú mať narovnako. Ak by sme perník rozkrájali na 3 stĺpce a aspoň 4 riadky, tak je to stále tá istá situácia, iba otočená o 90°.



Ďalšia možnosť je teda 4x4. Klára by mala v tomto prípade 8 kúskov a Peter iba 4. Ak by sme pridali jeden stĺpec, tak by mala Klára 10 kúskov a Peter iba 6 kúskov. Pridaním stĺpca pribudnú 2 stredové a 2 okrajové kúsky. Pridávaním stĺpcov teda pribudne Petrovi aj Kláre vždy rovnako veľa kúskov, takže ich nikdy nebudú mať rovnako veľa. Ak by sme perník rozkrájali na 4 stĺpce a aspoň 5 riadkov, tak je to stále to isté, iba otočené o 90°.

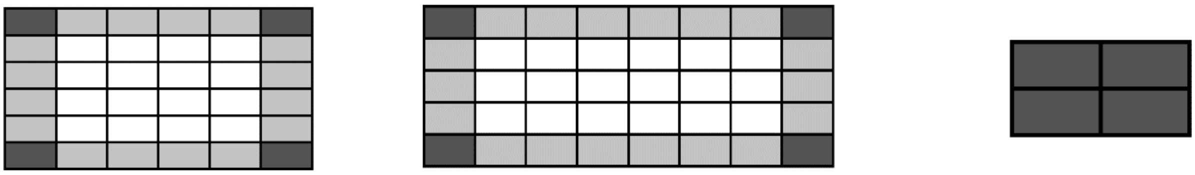


Ďalšia možnosť je 5x5. Klára by mala v tomto prípade 12 kúskov a Peter iba 9 kúskov. Keď pridáme jeden stĺpec, tak bude mať Klára 14 kúskov a Peter 12. Pridaním stĺpca pribudnú 3 stredové a 2 okrajové kúsky. Petrovi teda pribudne vždy o 1 kúsok viac ako Kláre, a teda má šancu ju dobehnúť. Postupným pridávaním stĺpcov sa bude rozdiel medzi Petrovými a Klárinými kúskami zmenšovať o 1. Po pridaní troch stĺpcov budú mať teda rovnako veľa kúskov. Vtedy nakrájame perník na 5x8. Pridávaním ďalších stĺpcov bude Petrovi vždy pribúdať o 1 kúsok viac ako Kláre, čiže by mal Peter stále viac a viac kúskov ako Klára. Ak by sme perník rozkrájali na 5 stĺpcov a aspoň 6 riadkov, tak je to stále to isté, iba otočené o 90°.

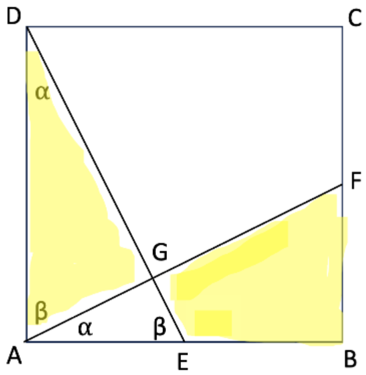


Ďalšia možnosť je 6x6. Klára aj Peter majú v tomto prípade 16 kúskov. Ak pridáme jeden stĺpec, tak pribudnú 4 stredové kúsky a 2 okrajové kúsky. Petrovi by teda pribudlo o 2 kúsky viac ako Kláre a mal by stále viac a viac kúskov ako Klára. To isté platí aj pre pridávanie riadkov. A aj keby sme pridávanie riadkov a stĺpcov kombinovali, tak by vždy Petrovi pribudli aspoň 4 kúsky, zatiaľ čo Kláre by pribudli vždy iba 2 kúsky. Pri hocijakom pridaní riadka alebo stĺpca pribudne Petrovi viac kúskov ako Kláre (aspoň o 2 kúsky viac), Keby sme teda pridali ľubovoľne veľa riadkov alebo stĺpcov, tak by mal Peter vždy viac kúskov ako Klára. Žiadne ďalšie možnosti už preto neexistujú.

Preto vieme povedať, že **perník mohol byť nakrájaný iba nasledovnými spôsobmi:**



Úloha č. 2 *(opravovala Iva Jančigová)*



Veľká pochvala pre vás, riešiteľky a riešitelia, za tvorivosť, lebo na tento príklad ste našli kopu rôznych riešení. Niektorí/é ste použili Pytagorovu vetu na dopočítanie rozmerov a z nich obsahov, niektorí/é ste nakreslili obálku na štvorčekovú sieť a počítali štvorčeky a ich časti, niektorí/é ste rozdelili obálku na zhodné trojuholníky, niektorí/é pracovali so zhodnými uhlami, podobnosťou a pomermi, niektorí/é ste vhodne dokreslili rovnobežky a popreklápali malé trojuholníky do kríža tvoreného piatimi štvorcami. Jedno riešenie dokonca sčitovalo „nekonečný" rad. V tomto príklade sa naozaj ukázalo, že nie je len jeden správny postup, ale že k riešeniu sa dá dopracovať rôznymi cestičkami. Všetky sa sem do vzorákov nezmestia, takže uvediem len jednu z nich, ale aj tie ostatné (pokiaľ sú poriadne zdôvodnené) sú za plný počet bodov. Krásne vymýšľajte aj ďalej a teraz už k jednému možnému riešeniu.

V geometrických úlohách je užitočné si na začiatku pooznačovať body, uhly, dĺžky alebo iné informácie, ktoré zo zadania máme. V našom prípade napríklad vrcholy štvorca označíme A, B, C a D, stredy strán AB a BC označíme postupne E a F a priesečník úsečiek DE a AF označíme G. Ďalej označíme uhol ADE ako α a všimneme si, že uhol FAB je rovnako veľký (čiže tiež α), pretože Δ DAE a Δ FAB sú zhodné (podľa vety sus – jedna ich strana je strana štvorca, jedna strana je polovica strany štvorca a uhol, ktorý zvierajú, je pravý).

Ďalej si označíme uhol DAG ako ß a všimneme si, že uhol AED má tiež veľkosť ß. Je to preto, že pri vrchole A je α + ß = 90° a v Δ AED uhol pri vrchole E je 180° – 90° – α = 90° – α, čiže ß. Z toho vyplýva, že Δ DAG a Δ AEG sú podobné (podľa vety uu, tie dva uhly sú α a ß; tretí je 90°, čiže sú aj pravouhlé).

Dĺžka úsečky AE je polovica dĺžky strany AD, čiže Δ AEG a Δ DAG sú podobné v pomere 1:2. Ich obsahy sú potom v pomere 1:4 (pretože základňa menšieho je polovica základne väčšieho a výška menšieho je polovica výšky väčšieho). Z toho vyplýva, že plocha Δ AEG je 1/5 plochy Δ DAE.

Plocha Δ DAE je 1/4 obsahu štvorca (strana DA je stranou štvorca a výška AE na ňu je polovica strany štvorca). Preto zlatá plocha DAG je 1/4 · 4/5 = 1/5 plochy štvorca (celej obálky).

Potom si všimneme, že druhá zlatá plocha (štvoruholník GEBF) má rovnaký obsah ako Δ DAG, pretože je to plocha Δ ABF (rovnaká ako plocha Δ DAE) bez plochy malého Δ AEG.

Čiže celkovo **zlatá časť je 1/5 + 1/5 = 2/5 plochy celej obálky**, čo vieme inak zapísať ako pomer 2:5.

Úloha č. 3 *(opravoval Hynek Bachratý)*

Našou úlohou bolo zistiť a zdôvodniť, či sa pomocou dvoch kúziel dá z jednej bunky namnožiť presne 60 (prvý vedec), a či sa dá namnožiť **každý** počet buniek väčší ako 60 (druhý vedec).

Skoro všetci ste si správne všimli, že ak po kúzle pribudne 8 alebo 12 buniek a pôvodná bunka zanikne, je to pre počet buniek to isté, ako keď bunky zostávajú zachované a postupne pribúda 7 alebo 11 buniek. Z toho bol už len kúsok k nápadu, že všetky možné počty buniek, ktoré sa dajú kúzlami dosiahnuť, sa dajú vyjadriť ako ***1 + m · 7 + n · 11***, kde ***m*** a ***n*** sú ľubovoľné prirodzené čísla (vrátane 0). Nezáleží pri tom na poradí, v akom kúzla používame, ale len ktoré koľko krát.

V úlohe treba najskôr vysvetliť, či takto **vieme vyjadriť číslo 60**. Zdôvodniť je to najjednoduchšie tak, že vyskúšame všetky možnosti ako by sa dalo dosiahnuť číslo 60, a ukáže sa, že ani jedna nám nevyjde. Pri zdôvodnení ale musí byť jasné, že sme pri skúšaní naozaj preskúmali všetky možnosti a žiadnu nepreskočili. (Inak by to, že nám nevyšlo 60, mohla byť len naša nešikovnosť alebo nepozornosť.)

Dobrý systém je uvedomiť si, že pri hľadaní má zmysel použiť druhé kúzlo „+11" najviac päťkrát. Ak by sme ho použili šesťkrát, máme už 1 + 6 · 11 = 67 buniek, a to je už zbytočne veľa.

Preskúmame teda všetky hodnoty ***1 + n · 11*** pre *n* od 0 po 5 a pozrieme, koľko ešte zostáva do 60:

1 + 0 · 11 = 1, zostáva 59, 1 + 1 · 11 = 12, zostáva 48, 1 + 2 · 11 = 23, zostáva 37

1 + 3 · 11 = 34, zostáva 26 1 + 4 · 11 = 45, zostáva 15 1 + 5 · 11 = 56, zostáva 48

Zvyšok do 60 by sme ale museli zabezpečiť prvým kúzlom, ktoré pridáva vždy 7 buniek. Vidíme, že žiadny zo zvyškov nie je násobok čísla 7, a teda druhým kúzlom sa pre žiadnu možnosť ku 60 nedostaneme. Odpoveď teda je, že **prvý vedec nemal pravdu**.

Druhá hypotéza bola, že sa nám podarí našimi kúzlami dosiahnuť a teda v tvare ***1 + m · 7 + n · 11*** **vyjadriť každé číslo od 61**. Tu je problém, že keď niečo chceme dokázať pre nekonečne veľa čísel, nestačí nám len skúšať, ale musíme nájsť postup, ako sa neobmedzene dostávať k stále väčším číslam. Takých systémov je viac. Najjednoduchšie bolo uvedomiť si, že ak vieme vyjadriť napríklad 61 (1 + 7 · 7 + 1 · 11), vieme opakovaným používaním prvého kúzla k 61 postupne pridávať +7, a teda dosiahnuť aj čísla 68, 75, 82, ... a tak ďalej až do nekončena. Podobne z 62 (1 + 4 · 7 + 3 · 11) vieme ďalej dostať 69, 76, 83 atď. Po troche skúšania väčšina z vás zistila, že vieme dosiahnuť aj čísla 63, 64, 65, 66 a 67, a ďalej ich zväčšovať o +7. Keďže ale od 61 po 67 ide o sedem za sebou nasledujúcich čísel, pridávaním sedmičiek k nim už máme zabezpečené, že postupne **vyjadríme každé z čísel väčších ako 60** a žiadne určite nepreskočíme. (Úplne presne sa to dá vysvetliť pomocou zvyškov po delení číslom 7). **Druhý vedec teda mal pravdu.**

Ak v riešení nebol systém spoľahlivého prehľadávania čísel alebo pokračovania do nekonečna dostatočne jasne popísaný a vysvetlený, nebolo za plný počet bodov. V niektorých riešeniach bol aj zaujímavý nápad, že keď sa namiesto použitia troch kúziel „+7", ktorými pribudne 3 · 7 = 21 buniek, použije dvakrát kúzlo „+11", ktoré pridá 22 buniek, vieme tak počet buniek postupne o 1 zvyšovať. Ale nech by ste začali z akého koľvek vyjadrenia, pri tom postupe po určitom čase vymeníte všetky kúzla „+7" za „+11" a jedničku už nebudete vedieť pridať. Za tento postup preto tiež nebol plný počet bodov.

Úloha č. 4 (*opravoval Janči Jakubík****)***

Ako prvé si treba uvedomiť, že neexistuje „desatinný gól", teda počty gólov v bránkach budú vždy celé číslo.

Nepoznáme presný počet gólov desať minút pred koncom tréningu, ale vieme si tento počet označiť napríklad ako G. Vieme, že pomer gólov v bránkach desať minút pred koncom tréningu bol 2:3:3. To znamená, že tento pomer nám rozdelí G (počet gólov desať minút pred koncom tréningu) na osem rovnakých častí (2 + 3 + 3 = 8). V prvej bráne budú dve rovnaké časti, v druhej bráne tri rovnaké časti a v tretej bráne tiež tri rovnaké časti gólov. O jednej rovnakej časti však nevieme povedať koľko presne gólov predstavuje, iba že predstavuje 1/8 z G. Ak sa nad tým zamyslíme, tak G musíme vždy vedieť rozdeliť na osem rovnakých častí, bez ohľadu na to, koľko gólov jedna rovnaká časť predstavuje, a teda G musí byť deliteľné ôsmimi.

Podobne sa vieme zamyslieť aj nad počtom gólov v bránkach po konci tréningu. Nepoznáme presný počet gólov, ale vieme, že ich bolo o dvadsať viac ako počet gólov desať minút pred koncom tréningu. Môžeme teda napísať, že ich bolo G + 20. Pomer gólov v bránkach po konci tréningu bol 7:10:9. To opäť znamená, že nám tento pomer rozdelí G + 20 na 26 (7 + 10 + 9 = 26) rovnakých častí. Tieto rovnaké časti sú však iné ako rovnaké časti spomínane skôr, lebo vznikli z iného pomeru. V prvej bráne bude sedem rovnakých častí, v druhej bráne desať rovnakých častí a v tretej bráne deväť rovnakých častí gólov. G + 20 musíme vždy vedieť rozdeliť na 26 rovnakých častí bez ohľadu na to, koľko gólov jedna rovnaká časť predstavuje, a teda G + 20 musí byť deliteľné 26.

Zistili sme, že G musí byť deliteľné 8 a G + 20 musí byť deliteľné 26.

Skúsme teraz nájsť také počty gólov, ktoré budú deliteľné 26 bezo zvyšku. Určite to budú celočíselné násobky čísla 26, a teda G + 20 by mohli byť nasledovné počty gólov: 26, 52, 78, 104, 130, 156, 182, 208, 234, 260, 286, 312, 338, 364, 390, 416, 442, 468 a tak ďalej.

Ak od týchto počtov gólov odpočítame 20, dostaneme G a pre G vieme, že musí byť deliteľné 8. Skúsme teda či vyhovuje počet gólov 26:

$$G + 20 = 26 \quad /-20$$
$$G = 6$$

Vieme, že 6 nie je deliteľné 8 bezo zvyšku, a teda ani možný počet gólov na konci tréningu 26 nevyhovuje.

Overme si takto prvých 18 možných počtov gólov na konci tréningu (zapíšeme si to do tabuľky):

G+20	26	52	78	104	130	156	182	208	234
G	6	32	58	84	110	136	162	188	214
G deliteľné 8 bezo zvyšku?	nie	áno	nie	nie	nie	áno	nie	nie	nie

G+20	260	286	312	338	364	390	416	442	468
G	240	266	292	318	344	370	396	422	448
G deliteľné 8 bezo zvyšku?	áno	nie	nie	nie	áno	nie	nie	nie	áno

Pre tie možnosti počtov gólov G a G + 20, pri ktorých je G deliteľné 8 bezo zvyšku, sa poďme pozrieť na pomery gólov v jednotlivých bránach.

Ak G = 32 a (G + 20) = 52:
10 minút pred koncom tréningu: (2 * 4) : (3 * 4) : (3 * 4) => 8:12:12
Po konci tréningu: (7 * 2) : (10 * 2) : (9 * 2) => 14:20:18

Všimnime si, že počty gólov v bránkach vždy iba narastali, a teda táto možnosť je jedným z riešení príkladu.

Ak G = 136 a (G + 20) = 156:
10 minút pred koncom tréningu: (2 * 17) : (3 * 17) : (3 * 17) => 34:51:51
Po konci tréningu: (7 * 6) : (10 * 6) : (9 * 6) => 42:60:54

Počty gólov v bránkach narastali, a teda táto možnosť je ďalším z riešení príkladu.

Ak G = 240 a (G + 20) = 260:
10 minút pred koncom tréningu: (2 * 30) : (3 * 30) : (3 * 30) => 60:90:90
Po konci tréningu: (7 * 10) : (10 * 10) : (9 * 10) => 70:100:90

Počty gólov v bránkach narastali, a teda táto možnosť je tiež riešením príkladu.

Ak G = 344 a (G + 20) = 364:
10 minút pred koncom tréningu: (2 * 43) : (3 * 43) : (3 * 43) => 86:129:129
Po konci tréningu: (7 * 14) : (10 * 14) : (9 * 14) => 98:140:126

V tejto možnosti si všimnime, že v tretej bráne je počet gólov 10 minút pred koncom tréningu väčší ako po konci tréningu (129 > 126), čo nie je možné, lebo záporné góly neexistujú. Teda táto možnosť nie je riešením príkladu.

Každá ďalšia možnosť pre G a G + 20 už nie je možná, pretože sa vždy nájde bránka, v ktorej sa počet gólov bude zmenšovať (prečo sa tak deje už nie je súčasťou riešenia, ale môžete na to prísť).

V zadaní sa pýtame na počet gólov dokopy, ktoré Peter strelil počas tréningu, a teda odpoveď je že **Peter počas tréningu mohol streliť buď 52, 156 alebo 260 gólov**.