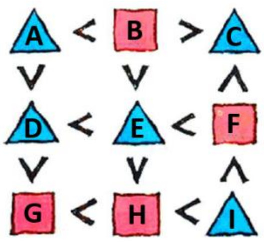
JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVII. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG

S E Z A M K O, Školský rok 2023/2024, 1. zimná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 *(opravovala Lili Chovancová a Števka Glevitzká)*



Než začneme hľadať samotný kód, označme si jednotlivé políčka, nech sa o nich vieme lepšie rozprávať. Označíme ich písmenami od A po I, tak ako na obrázku.

Veľa z vás si všimlo nejaké špeciálne políčka. Napr. „nepárne“ políčko C, lebo je menšie od všetkých svojich susedných políčok. Preto sa nám tam núka dať číslo 1 (najmenšia z nepárnych cifier). Toto by ale ako argument nestačilo, lebo takých políčok by mohlo byť viac. Avšak všetky ostatné trojuholníky majú nejakého suseda, ktorý je od daného trojuholníka menší, a preto do nich číslo 1 napísať nemôžeme. **Takže číslo 1 bude určite v políčku C**.

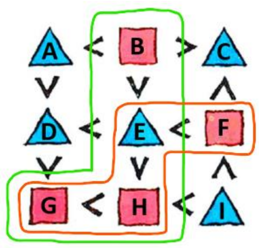
Veľmi podobne môžeme postupovať pri políčku I. Je to jediný trojuholník, ktorého susedia sú všetci menší. **Preto na políčku I musí byť číslo 9** (najväčšia z nepárnych cifier). Táto úvaha sa už ale nedá použiť pri štvorcovom políčku B (ako sa viacero z vás snažilo). Je síce tiež väčšie ako všetci jeho susedia a núkalo by sa nám tam číslo 8, avšak číslo 8 by mohlo byť aj v políčku F (je menšie od 9 a od zvyšných susedov je väčšie – to sedí).

Ďalej sa dá postupovať veľa rôznymi a peknými spôsobmi. Ukážeme si dva z nich.

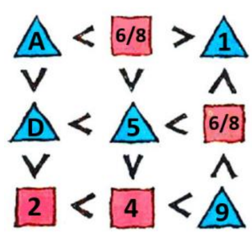
1. spôsob: Pozrime sa na nepárne čísla a trojuholníky, ktoré nám zvýšili. Zostali nám cifry 3, 5 a 7 a trojuholníky A, D a E. O nich vieme, že platí D < A a D < E. Preto na políčku D musí byť najmenšie zo zvyšných nepárnych čísel, a teda číslo 3. Pre A a E zostali cifry 5 a 7.

Ďalej si všimneme políčko B. Je väčšie ako A a E, ale to už vieme, že tam nejako budú cifry 5 a 7. Jediná párna cifra väčšia ako 5 a 7 je cifra 8, teda na B bude číslo 8.

V predposlednom kroku sa pozrieme na „cestičku“ z políčok G, H, E, F. A to preto, lebo z obrázka máme, že platí G < H < E < F. Navyše, políčka G, H a F sú štvorce, preto tam musíme doplniť párne čísla. Ale číslo 8 sme už doplnili, takže tam budú čísla 2, 4 a 6. Teda G = 2, H = 4 a F = 6. Potom už ľahko doplníme E = 5 (lebo 4 < E < 6). Zostalo nám už iba jedno nedoplnené číslo a trojuholník A. Preto A = 7 a máme hotovo.

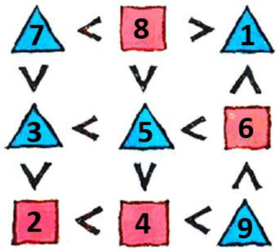


2. spôsob: Aj tu nám pomôžu „cestičky“ z políčok. Okrem cestičky G < H < E < F si všimnime, že platí aj G < H < E < B (pozri obrázok). Na políčka G, H, F a B potrebujeme doplniť párne čísla, a teda čísla 2, 4, 6 a 8. V nerovnostiach G < H < F a G < H < B sa nám G a H opakuje, teda to budú dve najmenšie párne čísla. Takže G = 2 a H = 4. Zostalo nám, že F a B sú v nejakom poradí 6 a 8. V každom prípade ale vieme, že políčko E je väčšie ako 4 a menšie ako 6 a 8, preto E = 5.



Teraz upriamime svoju pozornosť na trojuholník D. Na políčka G a E sme už doplnili čísla, takže už vieme, že D > 2 a D < 5. Jediné nepárne číslo, čo to spĺňa, je číslo 3. Teda D = 3. Zostalo nám tak už iba jedno nepárne nedoplnené číslo (a jeden voľný trojuholník), a tak A = 7. Na to hneď nadviažeme, lebo má platiť, že A < B. Preto do B treba dať cifru 8. Ako posledná nám zostala cifra 6 a políčko F, teda F = 6.

Výsledok: Oboma spôsobmi sme prišli k práve jednému správnemu riešeniu. V krokoch, ktoré sme robili, sme dopĺňali iba čísla, ktoré inde už byť nemohli. Preto si môže byť Sofia istá, že Jakubov kód je tento:



***Úloha č. 2** (opravovala Kika Ďuračíková)*

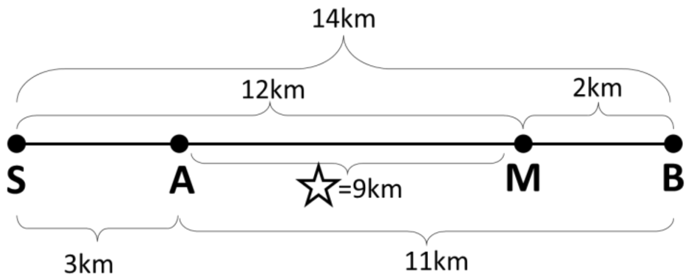
Označme si studničku, altánok, most a bufet písmenami S, A, M a B a načrtnime si ich na rovnú cyklocestu – na úsečku. Potom jednotlivým úsekom priradíme vzdialenosti zo zadania 2, 3, ☆, 11, 12 a 14 km.

Najväčšia vzdialenosť 14 km bude celá dĺžka výletu, teda to bude dĺžka úseku SB. Kde by mohla byť vzdialenosť 12 km? Mohla by byť medzi susednými zastávkami, teda medzi SA, AM alebo MB? Ak by dĺžka jedného z týchto úsekov bola 12 km, potom by ostatné dva úseky dohromady mali len 2km. To by už boli moc krátke úseky, zo zadania vieme, že ten najkratší má 2 km, takže **12 km môže mať len úsek SM alebo AB**.

Podobne je to s 11 km, ani jeden z úsekov SA, AM alebo MB nemôže mať 11 km, lebo zostávajúce dva úseky by mali dohromady len 3 km. Keby si medzi sebou tieto 3km rozdelili, aspoň jeden z nich by bol kratší ako 2km. **Preto 11 km môže mať iba úsek AB alebo SM**.

Úseky dĺžky 2 km a 3 km budú uložené tak, aby dohromady s úsekmy 11 km a 12 km dávali celú dĺžku výletu. **Teda to budú úseky SA alebo MB**.

Dohromady máme dve možnosti, ktoré sú ale zrkadlovo otočené, preto sem nakreslíme len jednu z nich:



Z obrázku vidíme, že ☆ je dĺžka úseku AM, ktorú vypočítame ako 14 − 2 − 3 = 9 km. Vzdialenosť medzi studničkou a mostom môže byť 11 km alebo 12 km, to nevieme povedať presne.

Úloha č. 3 (*opravoval Kačka Bachratá****)***

Našou úlohou bolo zistiť a zdôvodniť, či budú mať Danka a Janka rovnaké vreckové, alebo bude mať niektorá z nich viac. **Všetci ste zistili, že sa to nedá povedať presne**, lebo táto úloha je o náhode. Ale v živote často musíme rozhodnúť aj veci, ktoré nevieme urobiť presne. Musím vás skoro všetkých veľmi pochváliť, lebo ste si vymysleli a zorganizovali svoje vlastné pokusy (matematici tomu hovoria experimenty). A skoro všetkým vám vyšlo, že Danka dostala viac peňazí ako Janka. Volá sa to štatistika a je to tak, že keď urobíme veľa pokusov, tak vo väčšine prípadov to dopadne podobne. A niektoré situácie nenastanú skoro nikdy.

Napríklad to, že Danka dostane 1 euro a Janka 15 eur pri päťdesiatich výplatách vreckového od mamy je veľmi málo pravdepodobné. Skoro tak málo pravdepodobné, ako keď hodíme šestku až na 67. hod. Skúste si to a uvidíte, že to sa takmer nedá dosiahnuť. Ale naspäť k našej úlohe. Lebo niektorí z riešiteľov nielen zistili, že Danka dostáva viac eur, ale našli aj zaujímavé vysvetlenie. Totiž, keď mama začne hádzať kockou, tak Danka s pravdepodobnosťou jedna zo šiestich dostane euro. Ale Janka na svoju šestku musí čakať poriadne dlho. A niekedy ani nepríde na rad. To sa stane vtedy, keď padne šestka Danke na prvý hod, alebo zmrzline na druhý, tretí, štvrtý alebo piaty hod. Jankine losovanie nezačne hneď, ako u Danky, ale až keď 5-krát za sebou šestka nepadne. A to je teda už riadne znevýhodnenie pre Janku. Preto **Danka skoro vždy dostane väčšie vreckové**. Ale aj tak je to o náhode a niekedy sa môže stať, že pokus dopadne naopak a výnimočne dostane Janka viac eur. Ale to sa stane s veľmi malou pravdepodobnosťou.

Úloha č. 4 (**opravovala Erika Novotná**)

Milé deti, vašou úlohou bolo zistiť, koľko vážili tekvice na minuloročnej súťaži. Veľa z vás úlohu riešilo skúšaním – tipli ste si, koľko vážila najťažšia tekvica a postupne ste dorátali hmotnosti ostatných tekvíc.

Napríklad: Ak by najťažšia tekvica vážila 15 kg, tak tekvica na druhom mieste by musela vážiť 12 kg (lebo táto tekvica má byť o jednu pätinu ľahšia, teda o 3 kg ľahšia od tekvice na prvom mieste). Podobne sa dajú dorátať aj hmotnosti ostatných tekvíc. V tomto prípade by hmotnosti vyšli od najťažšej po najľahšiu postupne 15, 12, 9 a 6 kg. Ak však tieto hmotnosti sčítame, máme až 15 + 12 + 9 + 6 = 42 kg. Tekvice na prvých štyroch miestach ale majú vážiť dokopy len 35 kg, teda najťažšia tekvica musí byť ľahšia.

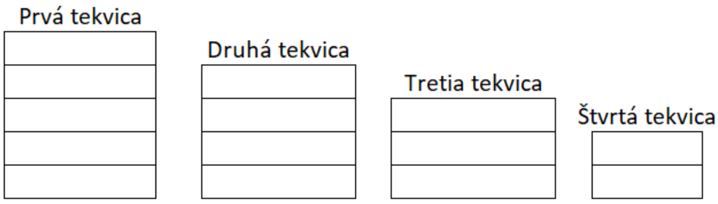
V tabuľke nižšie vidíte postupne tipy, ktorými ste aj vy väčšinou prešli, kým ste našli riešenie:

	Najťažšia tekvica	Druhá tekvica	Tretia tekvica	Štvrtá tekvica	Tekvice dokopy:
Prvý tip:	15	15 − 3 = 12	12 − 3 = 9	9 −3 = 6	15 + 12 + 9 + 6 = 42
Druhý tip:	10	10 − 2 = 8	8 − 2 = 6	6 − 2 = 4	10 + 8 + 6 + 4 = 28
Tretí tip:	12,5	12,5 − 2,5 = 10	10 − 2,5 = 7,5	7,5 − 2,5 = 5	12,5 + 10 + 7,5 + 5 = 35

Niektorí z vás potrebovali viac pokusov, kým našli, že **hmotnosť najťažšej tekvice je 12,5 kg**. Niektorí z vás si všimli, že 35 je presne v strede medzi 28 a 42, a preto si ako tretí tip vzali číslo presne v strede medzi 10 a 15. Niektorí z vás potrebovali rátať s gramami (12,5 kg = 12 500 g), lebo ešte nevedia rátať zo školy s desatinnými číslami – všetky tieto nápady si zaslúžia veľkú pochvalu.

Riešenie ako ho máme napísané doteraz má jeden malinký nedostatok – **mohla by najťažšia tekvica vážiť aj inak** a napriek tomu by to mohlo vyjsť? Väčšina z nás tuší, že asi nie. Zdá sa, že ak by bola najťažšia čo i len o trošku ťažšia ako 12,5 kg, celková hmotnosť štyroch tekvíc by asi vyšla viac. Podobne by to platilo, aj keby najťažšia vážila menej – tu by celková hmotnosť štyroch tekvíc asi vyšla menej. Je to naozaj tak?

My to však skúsime ukázať inak – postupne nakreslíme ako sa mení hmotnosť tekvíc. Ak by sme si hmotnosť tekvíc zaznačili obdĺžnikovými dielikmi, tak prvú by sme dali z piatich rovnakých dielikov (aby sme vedeli odobrať pätinu). Takže druhá musí mať len štyri takéto dieliky – lebo sme jednu pätinu z prvej odobrali. Podobne tekvica na treťom mieste by bola len z troch dielikov – lebo sme jednu štvrtinu z druhej odobrali (teda jeden dielik) a tekvica na štvrtom mieste by bola len z dvoch takýchto dielikov:



Dôležité je uvedomiť si tu, že tieto dieliky "hranatých" tekvičiek sú rovnako veľké a dokopy musia dávať 35 kg. Ako vidíme, celkovo majú prvá až štvrtá tekvica dokopy 5 + 4 + 3 + 2 dieliky, teda 14 dielikov. Na jeden teda musí prislúchať 35 : 14 = 2,5 kg. Keď dopočítame hmotnosti jednotlivých tekvíc, vyjde nám, že prvá váži presne 5 · 2,5 = 12,5 kg a to je presne riešenie, ktoré máme v tabuľke hore. Rozdiel oproti riešeniu postupného skúšania je v tom, že tu úplne presne vieme, že sme našli jediné riešenie, lebo hmotnosť obdĺžnikového dielika nám vyšla bez skúšania.

Odpoveď: Jednotlivé tekvice vážili postupne 12,5 kg, 10 kg, 7,5 kg a 5 kg.