JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVII. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2023/2024, 2. zimná séria
Vzorové riešenia

***Úloha č. 1** (opravoval Matúš Hladký)*

Keďže matemagická kalkulačka nezobrazuje číslicu 0, tak napríklad aj číslo 405 sa v nej zobrazí ako 45. Poďme teda zistiť, ktoré všetky výsledky môžeme dostať násobením, aby sa nám zobrazili ako 45.

Najmenšie číslo, ktoré vieme dostať vynásobením dvoch dvojciferných čísel ktoré neobsahujú 0 je $11 \cdot 11 = 121$. Naopak, najväčšie je $99 \cdot 99 = 9801$. Má teda zmysel uvažovať nad troj- a štvorcifernými číslami, ktoré po nezobrazení núl dajú číslo 45. Také čísla sú 405, 450, 4005, 4050 a 4500.

Teraz potrebujeme akurát zistiť, aké dve dvojciferné čísla neobsahujúce 0 musíme vynásobiť, aby sme dostali jedno z týchto čísel. To vieme zistiť dvoma spôsobmi.

Prvý spôsob je, že si všimneme, že všetky tieto čísla sú deliteľné 5, a teda aj aspoň jedno z čísel, ktoré budeme násobiť, musí byť deliteľné 5. Môžeme preto postupne naše potenciálne výsledky deliť násobkami 5 a určite dostaneme všetky riešenia. Dokonca nám stačí deliť dvojcifernými násobkami, ktoré sa končia číslicou 5, lebo tie končiace sa 0 aj tak nevieme zapísať do matemagickej kalkulačky.

405	450	4005	4050	4500
405 : 15 = 27	450 : 15 = 30	**4005 : 45 = 89**	4050 : 45 = 90	4500 : 55 = 81,81...
405 : 25 = 16,2	**450 : 25 = 18**	4005 : 55 = 72,81...	4050 : 55 = 73,63...	4500 : 65 = 69,23...
405 : 35 = 11,57...	450 : 35 = 12,85...	4005 : 65 = 61,61...	4050 : 65 = 62,30...	4500 : 75 = 60
	450 : 45 = 10	4005 : 75 = 53,4	**4050 : 75 = 54**	4500 : 85 = 52,94...
		4005 : 85 = 47,11...	4050 : 85 = 47,64...	4500 : 95 = 47,36...
		4005 : 95 = 42,15...	4050 : 95 = 42,63...	

Väčšími, resp. menšími číslami deliť nemusíme, lebo dajú jednociferný, resp. trojciferný výsledok.

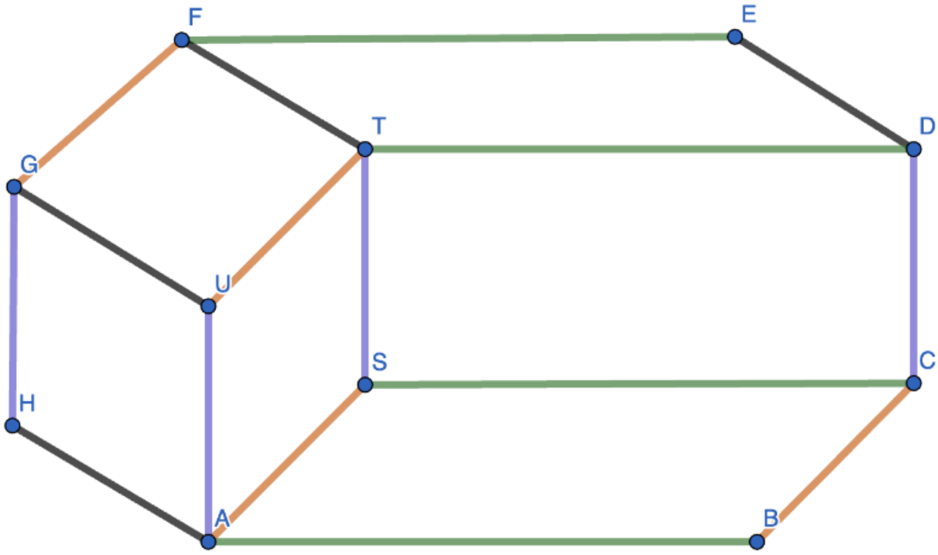
Z toho vidíme, že **sú 4 možnosti: 15 · 27, 25 · 18, 45 · 89 a 75 · 54** (a samozrejme obrátené). Ostatné možnosti nevyhovujú, lebo buď by jedno z čísel muselo byť desatinné, čo nemôže, alebo by v sebe malo číslicu 0.

Druhý spôsob, ktorý sme mohli zvoliť, je rozložiť si možné výsledky na prvočísla. Potom rozdeliť prvočísla do dvoch skupín tak, aby keď vynásobíme prvočísla vrámci skupiny, dostaneme dvojciferné čísla neobsahujúce 0. Vieme si aj všimnúť, že 2 a 5 nemôžeme dať do rovnakej skupiny, lebo inak bude výsledok končiť nulou:

- $405 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5) = 27 \cdot 15$
- $450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = 18 \cdot 25$
- $4005 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 89 = (3 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (89) = 45 \cdot 89$
- $4050 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 5) = 54 \cdot 75$
- $4500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ -> nedá sa

Vidno, že vo všetkých prípadoch je iba jediná možnosť, ako rozdeliť prvočísla. Výnimkou je výsledok 4500, kedy sa to nedá. Musíme dať všetky päťky do jednej skupiny a do druhej dvojky. Skupina s päťkami ale bude nutne trojciferná, lebo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Preto nevieme vytvoriť dve skupiny, ktoré dajú po vynásobení dvojciferné čísla bez nuly.

***Úloha č. 2** (opravovala Baška Marečáková)*



Väčšina z vás si nakreslila obrázok, v ktorom rovnobežníky mali naozaj rovnobežky bez MateMagického pôsobenia. V našom obrázku si studne označme písmenami S, T a U. Pri kreslení sa nám môže zdať, že mestečko je zložené zo štyroch sád rovnobežných úsečiek:

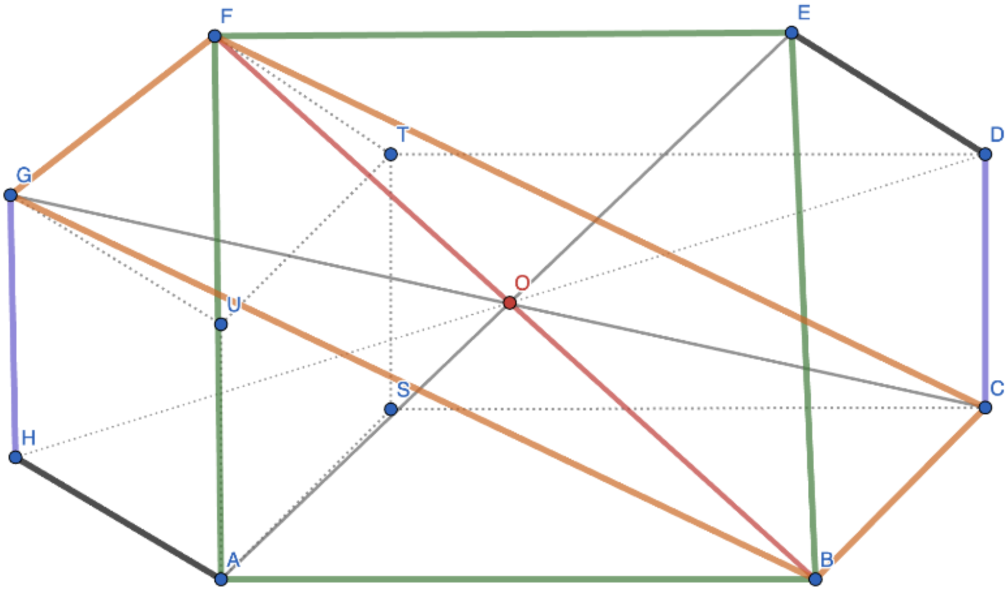
- AB, SC, TD, FE
- CD, ST, AU, HG
- BC, AS, UT, GF
- DE, TF, UG, AH

Osemuholník je zložený zo 6 rovnobežníkov, ktoré zdieľajú hrany, a preto platí: AB je rovnobežné s SC (sú súčasťou rovnobežníka ABCS), sú rovnobežné aj s DT (lebo SCDT je rovnobežník) a zároveň sú rovnobežné s FE, lebo aj TDEF je rovnobežník.

O rovnobežníkoch platí aj ďalšia zaujímavosť: protiľahlé strany sú rovnako dlhé. Ak by neboli, tak dostaneme lichobežník a nie rovnobežník, skúste si to nakresliť. Rovnakou úvahou, akú sme popísali pri rovnobežnosti, vieme, že AB má rovnakú dĺžku ako FE.

Peter tvrdí, že ABEF je rovnobežník. My sme ukázali, že úsečka AB je rovnobežná s FE a majú rovnakú dĺžku, teda aj úsečky AF a BE sú rovnobežné a majú rovnakú dĺžku. **Petrove tvrdenie je pravdivé.**

Klára tvrdí, že úsečky spájajúce protiľahlé body v osemuholníku sa pretínajú v jednom bode. Náš osemuholník je špeciálny v tom, že je zložený z rovnobežníkov. Ukázali sme, že ABEF je tiež rovnobežník a má uhlopriečky AE a BF spájajúce protiľahlé body osemuholníka. O uhlopriečkach v rovnobežníku vieme, že sa pretnú v polovici ich dĺžky (rozpoľujú sa). Bod priesečníka AE a BF si označme O. O sa nachádza v polovici AE a v polovici BF.



Zamyslime sa, aké ďalšie rovnobežníky máme v našom osemuholníku. Vždy vrcholy protiľahlých strán tvoria rovnobežník – – ABEF, BCFG, CDGH, DEHA. V každom z týchto rovnobežníkov sa uhlopriečky rozpoľujú, čiže pre rovnobežník BCFG je priesečník uhlopriečok v polovici úsečky BF, a to je už predtým nami označený bod O.

Nakreslime takto všetky uhlopriečky. Bod O je vždy v polovici každej úsečky spájajúcej protiľahlé vrcholy. Z toho vieme povedať, že **Klára má tiež pravdu**, úsečky AE, BF, CG a DH sa pretínajú v jednom bode.

Úloha č. 3 (*opravovali Alica Cimráková a Matúš Jonaštík)*

Takmer všetci ste si po prečítaní zadania uvedomili, čo nám podmienky hovoria o súčte zvyšných 9 kamienkov:

- Ak sa dá 9 kamienkov rozdeliť do 3 skupín s rovnakým súčtom čísel na nich napísaných, tak musí byť ich súčet deliteľný 3.
- Ak sa dá 9 kamienkov rozdeliť do 4 skupín s rovnakým súčtom čísel na nich napísaných, tak musí byť ich súčet deliteľný 4.

Po premenení hľadaného kamienku na žabku bol preto súčet zvyšných kamienkov deliteľný 3 aj 4 (niektorí ste si pekne všimli, že bude preto deliteľný aj 12). Chceme preto nájsť takéto číslo.

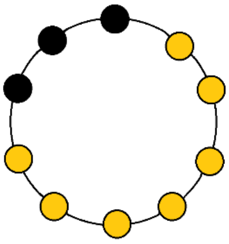
Medzi akými číslami môžeme hľadať? Všetky kamienky spolu by mali súčet 1 + 2 + ... + 9 = 45. Najmenší kamienok, aký môžeme odobrať, je 0. Vtedy by zvyšných 9 kamienkov malo súčet 45 − 0 = 45. Najväčší kamienok, aký môžeme odobrať, je 9. Vtedy by zvyšných 9 kamienkov malo súčet 45 − 9 = 36. Hľadáme preto len medzi číslami od 36 po 45, vrátane.

Pomerne ľahko už teraz zistíme, že **takýmto číslom je len 36**. Treba si však uvedomiť, že to, že je deliteľné 3 aj 4 ešte neznamená, že sa kamienky do takýchto skupín aj naozaj dajú rozdeliť (napr. keby máme kamienky s číslami 2, 1, 5, 4, tak majú súčet 12 deliteľný aj 3 aj 4, ale rozdeliť do troch ani do štyroch skupín s rovnakými súčtami sa nedajú). Preto treba nájsť a ukázať aspoň jedno **rozdelenie na 3 a** jedno **rozdelenie na 4 skupiny s rovnakým súčtom**.

Dá sa to napríklad takto:

4 skupiny	**3 skupiny:**
8, 1	8, 4
7, 2	7, 5
6, 3	6, 3, 2, 1, 0
5, 4, 0	

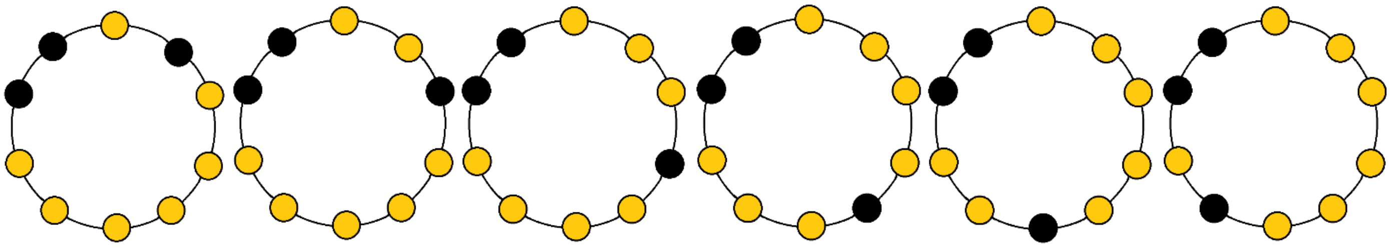
Úloha č. 4 (*opravovali Miška Rosinská a Maťka Gaňová****)***



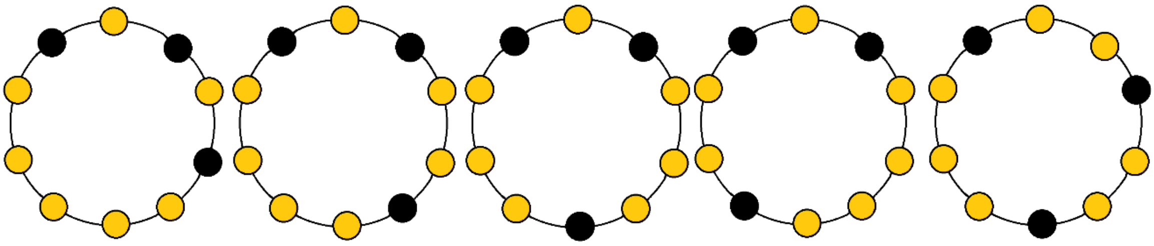
Na lustri je vždy 7 zasvietených a 3 zhasnuté žiarovky. Keďže zhasnutých žiaroviek je menej, zameriame sa na tie. Možnosti si rozdelíme na viaceré kategórie podľa toho, koľko zhasnutých žiaroviek je vedľa seba.

V prvej kategórii budú všetky 3 zhasnuté žiarovky hneď vedľa seba. Takáto možnosť existuje len jedna.

V druhej kategórii budú 2 zhasnuté žiarovky hneď vedľa seba a 1 oddelene. Zhasnúť nemôžeme žiarovku hneď pred alebo hneď za 2 zhasnutými, keďže by to bola možnosť prvej kategórie. Ak si vyberieme pozíciu pre 2 zhasnuté žiarovky, zostáva nám 6 pozícii, na ktoré môžeme žiarovku uložiť. Na obrázku si môžete všimnúť, že aj keď dve možnosti v jednom stĺpci vyzerajú na pohľad rovnako, tak sa nedá luster otočiť tak, aby boli rovnaké.



V tretej kategórii budú lustre, kde žiadne dve zhasnuté žiarovky nie sú vedľa seba. V takom prípade nám medzi nimi vzniknú 3 medzery. Každá medzera musí obsahovať aspoň jednu zasvietenú žiarovku, aby táto možnosť nepatrila do druhej kategórie. Teraz musíme do medzier umiestniť zostávajúce 4 žiarovky. Na to máme tieto možnosti: (0, 0, 4), (0, 1, 3), (0, 2, 2), (0, 3, 1), (1, 1, 2). Môžeme si všimnúť, že ak sa v možnosti dvakrát opakuje rovnaké číslo, tak tejto možnosti nevieme zmenou poradia vytvoriť ďalšiu možnosť. Zatiaľ čo ak obsahuje možnosť 3 rôzne čísla, tak vieme výmenou pozície dvoch čísel získať novú možnosť. Možností tretej kategórie existuje 5.



Takto sme prešli cez všetky možné rozdelenia zhasnutých žiaroviek. Dokopy teda existuje 1 + 6 + 5 = 12 rôznych možností.

Luster môže byť zasvietený rozdielnym spôsobom 12 večerov.