JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVII. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG

S E Z A M K O, Školský rok 2023/2024, 2. zimná séria
Vzorové riešenia

***Úloha č. 1** (opravoval Hynek Bachratý)*

Našou úlohou bolo poradiť Bolkovi, aké môže byť heslo počítača, ktorý si chce požičať. O hesle vieme, že je to **štvorciferné** číslo, zapísané ciframi ABCD, s vlastnosťou **ABCD · 4 = DCBA**. Teda keď heslo vynásobíme štyrmi, výsledok je zapísaný rovnakými ciframi ako heslo, ale v opačnom poradí.

Vaše riešenia mali veľa podobných nápadov, ktoré použijeme aj vo vzorovom riešení. Na začiatku pre istotu spomenieme, že keďže ide o štvorciferné čísla, cifra **A** aj cifra **D** nemôžu byť 0. (Ak by sme povolili aj zápisy s 0 na začiatku, 123 = 0123 = 00123 by bolo troj-, štvor- aj päťciferné číslo, čo nedáva zmysel.)

Číslo **ABCD** a jeho prvé cifry nemôžu byť moc veľké preto, aby po vynásobení štyrmi nebol výsledok **DCBA** už päťciferný. Preto **A** nemôže byť tri a viac (3000 · 4 = 12000). Ešte presnejšie, 2499 je najväčšie štvorciferné číslo, ktorého štvornásobok je stále štvorciferný. Preto **A** môže byť len 1 alebo 2. Ale **A** je nielen prvá cifra hesla, ale aj posledná cifra jeho štvornásobku **DCBA**. Ale toto číslo je určite párne (pretože je to štvornásobok nejakého iného čísla), a preto nemôže končiť na nepárnu cifru. Preto je isté, že **A = 2**.

Z toho už tiež vieme, že súčin **2BCD · 4** bude aspoň 8000. Musí teda začínať cifrou **D**, ktorá bude len 8 alebo 9. Cifra **A = 2** na konci DCBA je zároveň posledná cifra násobku **D · 4.** Ale 9 · 4 = 36, teda A by muselo byť 6, čo už vieme, že nie je možné. Preto **D** nemôže byť 9. Našťastie 8 · 2 = 32, čo zodpovedá už určenej hodnote A = 2. (Ak by to neplatilo, neexistovalo by žiadne heslo a Lolek nám klamal!) Teda zostala nám len možnosť **D = 8**.

Teraz už o hesle vieme, že spĺňa **2BC8 · 4 = 8CB2**. Aby výsledok nedosiahol 9000, nemôže byť príliš veľké ani **B**. Konkrétne **B** môže byť len 0, 1 alebo 2 (300 · 4 je už 1200 a počet tisícok by sa zväčšil aspoň na 9). Štvornásobok preto môže byť len 8C02, 8C12 alebo 8C22. Vieme ale, že štvornásobky musia mať posledné cifry tiež len nejaký štvornásobok. Možný výsledok teda môže byť len **8C12** a preto musí platiť **B = 1**.

Pre kód teda platí **21C8 · 4 = 8C12**. Tu by už stačilo vyskúšať všetky možné C a ukázalo by sa, že jediná vyhovujúca možnosť je **C = 7**. Komu sa nechce toľko skúšať, može začať násobiť. Keďže **8 · 4 = 32**, tak 2 zapíšeme a zostali nám 3. Tie pripočítané k výsledku **C · 4** končia na 1, a preto **C · 4** končí na 8. Tomu vyhovuje len C = 2 alebo C = 7. Ale výpočet 2128 · 4 = 8212 neplatí, zatiaľ čo **2178 · 4 = 8712** áno.

Heslo, ktoré Bolek potrebuje poznať, je teda 2178.

Na našom vysvetlení je pritom dôležité aj to, že je z neho jasné, že je to **jediné vyhovujúce číslo**, a bolo treba, aby také boli aj vaše vysvetlenia. Ak by totiž hesiel bolo viac, Bolekovi treba poradiť všetky. Len tak bude mať istotu, že sa mu počítač podarí začať používať.

Úloha č. 2 (*opravoval Majo Kurčina****)***

Zo zadania vieme, že máme 5 tvrdení:

1. “Dostal som viac ako 3 zvieratká.”,
2. “Všetky zvieratká sú morské medvedíky.”,
3. “Žiadne zo zvieratiek nie je škrečok.”,
4. “Dostal som viac ako 5 zvieratiek.”,
5. “Dostal som menej ako 7 zvieratiek.“,

avšak iba jedno z nich je pravdivé. Úlohu vieme začať riešiť tak, že sa pozrieme na to, či nejaké tvrdenia náhodou priamo nesúvisia. Po chvíľke rozmýšľania si môžeme napríklad všimnúť, že ak je 2. tvrdenie (Všetky zvieratká sú morské medvedíky) pravdivé, potom aj 3. tvrdenie (Žiadne zo zvieratiek nie je škrečok) je pravdivé. Toto platí aj naopak. Keďže može byť pravdivé práve jedno tvrdenie, tak obe tieto tvrdenia musia byť určite klamstvá.

Ostali nám 3 tvrdenia, z ktorých jedno bude pravdivé. Poďme sa teda postupne pre každé z nich pozrieť, čo by sa dialo, keby je práve ono pravdivé:

1. tvrdenie je pravdivé

Ak je prvé tvrdenie pravdivé, potom Pinocchio dostal viac ako 3 zvieratká, zároveň dostal najviac 5 zvieratiek a dostal najmenej 7 zvieratiek. V tomto prípade si 4. a 5. tvrdenia protirečia.

4. tvrdenie je pravdivé

Ak je štvrté tvrdenie pravdivé, potom Pinocchio dostal najviac 3 zvieratká, zároveň dostal viac ako 5 zvieratiek a dostal najmenej 7 zvieratiek. V tomto prípade si protirečí 4. a 5. tvrdenie s 1. tvrdením.

5. tvrdenie je pravdivé

Ak je toto tvrdenie pravdivé, potom Pinocchio dostal najviac 3 zvieratká, zároveň dostal najviac 5 zvieratiek a dostal menej ako 7 zvieratiek. Všetky tvrdenia platia, a teda viem, že **Pinoccho dostal 1, 2 alebo 3 zvieratká.**

Ďalej sa vieme pozrieť na všetky možnosti, aké zvieratká mohol dostať:

- Ak dostal 1 zvieratko, mohol dostať len škrečka, lebo inak by bolo aj 2. aj 3. tvrdenie pravdivé.
- Ak dostal 2 zvieratká, tak mohol dostať buď 2 škrečky alebo 1 škrečka a 1 medvedíka.
- Ak dostal 3 zvieratká, tak mohol dostať 3 škrečky, alebo 2 škrečky a 1 medvedíka, alebo 1 škrečka a 2 medvedíkov.

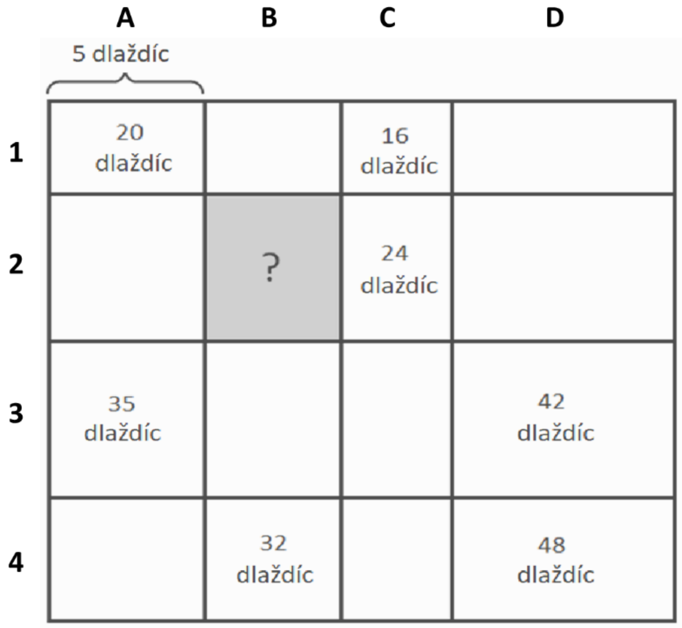
Postupne sme prešli cez všetkých 5 možností, ktoré určujú, ktoré tvrdenie je pravdivé (je ich práve 5, keďže pravdivé môže byť len jedno z piatich tvrdení).

Keď si spočítame všetky možné počty škrečkov a morských medvedíkov, na ktoré sme prišli, zistíme, že máme 6 možností pre počty zvieratiek, ktoré mohol Pinocchio dostať.

Úloha č. 3** (opravovali Kika Ďuračíková a Matej Grochal**)

Možno ste si všimli, že obrázok k tomuto príkladu nebol nakreslený veľmi presne. Napríklad ak porovnáme dve časti v poslednom stĺpci, so 42 a 48 dlaždicami, môžme si všimnúť, že tá so 42 dlaždicami je väčšia. Obrázok bol naozaj iba približný a skutočná veľkosť častí sa nedala získať meraním obrázka.

Označme si stĺpce a riadky v obrázku písmenkami a číslami, nech sa o ňom vieme ľahšie porozprávať.



Zo zadania vidíme, že všetky časti v prvom stĺpci budú mať šírku 5 dlaždíc. Časť A1 má 20 dlaždíc, na šírku 5, jej druhý rozmer teda bude 20 : 5 = 4 dlaždice. Všetky časti, ktoré sú s ňou v tomto riadku, budú mať tiež „na výšku" 4 dlaždice. Takže časť C1 bude mať na šírku 16 : 4 = 4 dlaždice. Časť C2 má jednu stranu spoločnú s časťou C1, preto bude mať na šírku tiež 4 dlaždice a jej druhý rozmer bude 24 : 4 = 6 dlaždíc. To je zároveň aj jeden rozmer sivej časti s otáznikom.

Vráťme sa naspäť do prvého stĺpca. Časť A3 má na šírku 5 dlaždíc, jej druhý rozmer bude 35 : 5 = 7 dlaždíc. Časť D3 je v rovnakom riadku ako časť A3, preto bude mať na šírku 42 : 7 = 6 dlaždíc. Časť D4 bude mať tiež na širku 6 dlaždíc a jej druhý rozmer bude 48 : 6 = 8 dlaždíc. Časť B4 bude mať na šírku 32 : 8 = 4 dlaždice. A to je zároveň druhý rozmer sivej časti s otáznikom.

Keďže sme získali oba rozmery sivej časti, počet dlaždíc už vieme vypočítať jednoducho ich súčinom. Na vydláždenie sivej časti s otáznikom teda potrebujeme 6 · 4 = 24 dlaždíc.

Úloha č. 4 *(opravoval Mojo Majdiš)*

Tento príklad bol trochu netradičný. Mohli ste sa rozhodnúť, či budete viac počítať, alebo merať. Tak či onak, veľa z vás úlohu riešilo experimentálne. Našli ste si krabicu od topánok alebo napríklad čajovú krabičku. Niekto si dokonca krabicu vymodeloval zo špáradiel a plastelíny. Presne, podľa zadania, ste zamerali červené bodky a potom začali merať.

A tu nastal problém. Čo a hlavne ako merať? Niektorí ste zobrali do rúk šnúrku alebo nitku a natiahli ste ju od jednej bodky k druhej. Potom ste sa s ňou chvíľu hrali a snažili ju na krabicu napasovať čo najpresnejšie. Priliepali alebo pripínali ste ju, aby neodstávala od krabice. Posúvali ste hore dole bod ohybu šnúrky na hrane krabice. A ešte všakovaké iné vylepšenia. Keď ste už šnúrku nevedeli nijak skrátiť, tak ste ju vystreli, priložili k pravítku a odmerali.

Iný prístup bol zobrať do ruky pravítko a merať. Nech sme sa však snažili akokoľvek, tak ohnúť pevné pravítko “za roh” sa nám nepodarilo. Po chvíľke zamyslenia viacerým napadlo vyrezať tie dve steny s bodkami a vystrieť ich do roviny. Zrazu sme ich vedeli odmerať.

Viacerí si navyše všimli, že červené bodky sú 2 vrcholy istého pravouhlého trojuholníka. Jedna jeho strana má dĺžku ako vodorovná vzdialenosť bodiek, čo je u Danky 3 cm + 1 cm = 4 cm. Druhá strana má dĺžku ako zvislá vzdialenosť bodiek, čo je u Danky 9 cm − 6 cm = 3 cm. Podobne u Janky majú tieto strany dĺžky 8 cm + 3 cm = 11 cm a 7 cm – 3 cm = 4cm.

Z týchto údajov už vo vyšších ročníkoch (pomocou tzv. Pytagorovej vety) vieme tretiu stranu trojuholníka presne vypočítať. Dokonca sa to podarilo aj niekoľkým riešiteľom Sezamka. Ostatným neostáva nič iné ako vziať pravítko a merať.

U Danky sme namerali presne 5 cm. U Janky Sme namerali máličko viac ako 11 cm a 7 mm.