JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU

XXXVII. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky

pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2023/2024, 3. zimná séria

Vzorové riešenia

Úloha č. 1 **(***opravovali Lenka a Miro Hudecovci***)**

V tejto úlohe hľadáme prirodzené číslo *X*, ktoré musí spĺňať dve podmienky:

1) *X* musí byť deliteľné číslami 2, 3 a 5,
2) ciferný súčet čísla *X* musí byť deliteľný číslami 2, 3 a 5.

Ak je *X* deliteľné číslami 2, 3 a 5, je určite deliteľné aj najmenším spoločným násobkom týchto čísel, teda číslom 30.

Vieme teda, že *X* a aj jeho ciferný súčet sú deliteľné číslom 30. Keďže chceme nájsť čo najmenšie *X*, tak ciferný súčet musí čo najmenší, lebo potom môže mať X menej cifier. Najmenšie prirodzené číslo deliteľné číslom 30 je práve tých 30, takže to bude náš hľadaný ciferný súčet.

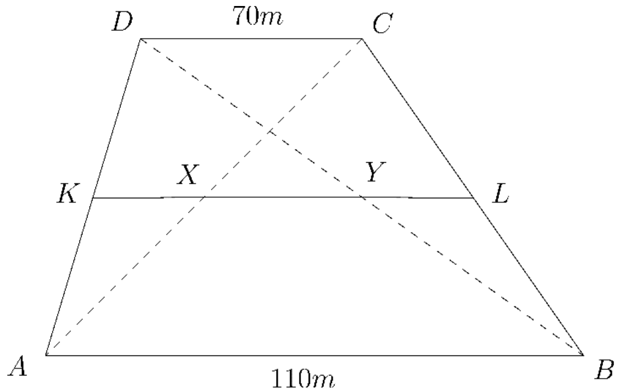
Aby bol ciferný súčet nejakého čísla 30 a zároveň chceme, aby bolo toto číslo čo najmenšie, potrebujeme použiť na jeho vytvorenie čo najmenej cifier. To dosiahneme tak, že opakovane použijeme cifru 9 čo najviackrát. 30 : 9 = 3 zv. 3. Naše *X* by sa teda mohlo skladať z cifier 9, 9, 9, 3, 0. Aby sme dostali čo najmenšie 5 ciferné číslo, ako prvú cifru dáme tú najmenšiu, teda 3. (0 jednak nemôže byť na začiatku a po druhé ju aj tak potrebujeme na konci, aby bolo *X* deliteľné 30). Máme číslo 39990. Toto číslo a aj jeho ciferný súčet sú deliteľné číslami 2, 3 a 5.

Keby sme namiesto niektorej cifry 9 použili cifru 8, z cifry 3 by sme museli urobiť 4, aby sedel ciferný súčet a tým pádom by sme dostali väčšie číslo. Preto je číslo 39990 najmenšie možné *X*.

Hľadané číslo je 39 990.

Úloha č. 2 (*opravoval Adam Kňaze****)***

Prvý krok, ktorým zväčša nič nepokazíme, je skúsiť si narysovať zopár možných verzií ihriska. Všimneme si vďaka tomu, že vzdialenosť stĺpov tvoriacich bránu vyzerá byť vždy rovnaká, bez ohľadu na polohu či vzdialenosť základní lichobežníka. Keďže však potrebujeme ukázať, že to bude platiť vždy, musíme naše zdôvodnenie postaviť na všeobecných matematických základoch, nie len na meraní. Načrtnime si obrázok nech máme lepšiu predstavu čo sa tu deje.



Základne lichobežníka (ihriska) si označíme AB a DC, stredy uhlopriečok X a Y. Našou úlohou je zistiť dĺžku |XY|. Jedna z prvých vecí, ktoré si môžeme všimnúť, je, že úsečka XY je rovnobežná so základňami lichobežníka a leží presne v strede medzi nimi. Keďže body X aj Y sú ako stredy uhlopriečok rovnako vzdialené od oboch základní, bude rovnako vzdialená od oboch základní aj úsečka, ktorú tvoria.

Toto pozorovanie by nám zároveň mohlo pripomenúť špeciálnu úsečku, ktorú voláme stredná priečka. V lichobežníku je to úsečka, ktorá spája stredy jeho ramien. Na obrázku sú označené K a L. Stredná priečka je tiež rovnobežná so základňami lichobežníka a leží v strede medzi nimi, teda úsečka XY bude ležať na strednej priečke. Pre strednú priečku lichobežníka platí, že jej dĺžka je priemerom dĺžok základní (jej dĺžka je presne v strede medzi dĺžkami základní). V našom prípade teda bude jej dĺžka (110 + 70) : 2 = 90.

Vieme teda, že súčet dĺžok |KX|+|XY|+|YL| = 90 metrov. Nás zaujíma primárne |XY|, potrebujeme teda zistiť dĺžky zvyšných dvoch úsečiek. S tým nám znovu vedia pomôcť stredné priečky, tentokrát stredné priečky trojuholníkov. KX je totiž stredná priečka trojuholníka ACD a YL je stredná priečka trojuholníka BCD. Stredná priečka trojuholníka spája stredy dvoch jeho strán, a jej dĺžka je polovicou tretej strany trojuholníka.

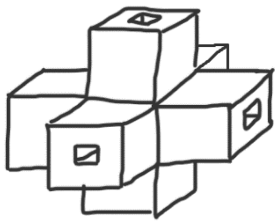
V našom prípade je tretia strana v oboch trojuholníkoch DC, jej dĺžka je 70 metrov, preto dĺžky stredných priečok KX a YL budú 35 metrov. Toto už len doplníme do výpočtu vyššie a ľahko vypočítame hľadanú dĺžku:

$$|KX|+|XY|+|YL| = 90$$
$$35 + |XY| + 35 = 90$$
$$|XY| + 70 = 90$$
$$|XY| = 20$$

Vzdialenosť stĺpov tvoriacich bránku bude vždy 20 metrov.

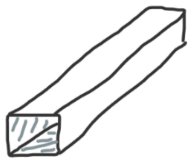
***Úloha č. 3** (opravoval Maťo Bachratý)*

Na začiatok je dobré si nakresliť alebo predstaviť, ako V'Alembertov talizman vyzerá. Ak si poriadne prečítame zadanie, tak s tým nie je žiaden problém. Zistíme, že talizman vyzerá takto:

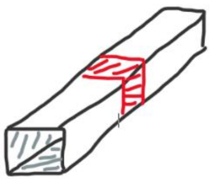


Ukážeme si dva rôzne spôsoby ako zistiť povrch takéhoto útvaru. Prvá možnosť je taká, že najskôr zrátame povrch vonkajších plôch, a potom povrch vnútorných plôch.[1] Na povrchu máme dokopy 30 stien s rozmermi 3 cm × 3 cm, no šesť z týchto stien má v strede výrez s rozmermi 1cm × 1cm. Povrch vonkajších plôch je teda spolu $30 \cdot 9\ \text{cm}^2 - 6 \cdot 1\ \text{cm}^2 = 264\ \text{cm}^2$.

Teraz sa pozrime na vnútornú plochu. Tú nám tvoria tri tunely, ktoré po vhodnom natočení všetky vyzerajú nejak takto:

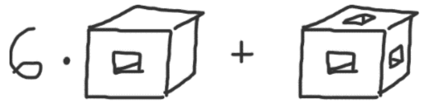


Jeden takýto tunel má dĺžku 9 cm, takže jeho štyri vnútorné steny majú každá rozmer 9 cm × 1 cm, čo nám dokopy dá plochu $4 \cdot 9\ \text{cm}^2 = 36\ \text{cm}^2$. Treba si však dať pozor, všetky tri tunely sa pretnú v strede útvaru v niečom, čo niektorí z vás poeticky nazvali *kockou prázdnoty*. Tu treba trochu zapojiť predstavivosť a uvedomiť si, že presne v strede talizmanu nám vznikne kocka s rozmermi 1 cm × 1 cm × 1 cm. No a táto kocka nemá žiadne steny. V každom tuneli teda dostaneme nasledujúci výrez:



Tento výrez mal pôvodne vnútornú plochu 4 cm², a teda nám tunel pridá do celkovej vnútornej plochy iba $36\ \text{cm}^2 - 4\ \text{cm}^2 = 32\ \text{cm}^2$. Tunely sú tri, takže celková vnútorná plocha je $3 \cdot 32\ \text{cm}^2 = 96\ \text{cm}^2$. **Výsledná plocha V'Alembertovho talizmanu je spolu $264\ \text{cm}^2 + 96\ \text{cm}^2 = 360\ \text{cm}^2$.**

Druhý spôsob riešenia už neprejdeme tak podrobne, len si ho zbežne priblížime. Keď sa na útvar poriadne pozrieme, tak si všimneme, že sa skladá zo šiestich vonkajších kociek, ktoré sa líšia iba natočením. A okrem toho má ešte jednu vnútornú kocku:



Ešte si treba uvedomiť, ktoré steny týchto kociek sú v talizmane zlepené, a teda sa nerátajú do celkového povrchu. Potom už stačí len trocha roboty aby sme zistili, že každá kocka s jedným tunelom pridá do plochy 56 cm² a deravá kocka pridá do plochy 24 cm². Celkový povrch teda vyjde $6 \cdot 56\ \text{cm}^2 + 24\ \text{cm}^2 = 360\ \text{cm}^2$.

---

1 Asi každému je intuitívne jasné, čo myslíme pod vonkajšou, a čo pod vnútornou plochou. Skúste sa zamyslieť, či by ste to vedeli vysvetliť aj exaktne, aby to pochopil aj niekto bez štipky intuície.

Úloha č. 4 (*opravovala Erika Novotná****)***

Očíslujme si krabičky postupne zľava doprava číslami 1 až 5. Zo zadania vieme, že kľúč sa vždy presúva iba do susednej krabičky – teda ak bol kľúčik v párnej krabičke, tak sa presunie do nepárnej a naopak. Zároveň si môžeme všimnúť, že v krabičkách 2 alebo 4 je kľúčik každé druhé kolo. Skúsme nájsť najskôr spôsob, ako chytiť kľúčik, ak je na začiatku v niektorej z týchto dvoch krabičiek:

1. tip: Krabička 2: Buď je kľúčik v krabičke číslo 2, a teda sme ho našli. Alebo bol v krabičke 4 a po hľadaní sa presunie do krabičky 3 alebo do krabičky 5.

2. tip: Krabička 3: Keďže po predchádzajúcom ťahu vieme, že kľúč je v krabičke 3 alebo 5, tak buď ho nájdeme (ak je v krabičke 3) alebo ho nenájdeme a kľúčik sa presunie z krabičky 5 do krabičky s číslom 4.

3. tip: Krabička 4: Po predchádzajúcom kroku ostala už len možnosť, že kľúčik je v krabičke s číslom 4, takže ho určite nájdeme.

Našli sme teda zatiaľ spôsob na tri ťahy, ako určite vieme nájsť kľúč, ak bol na začiatku v krabičke s číslom 2 alebo 4. Ak by bol však na začiatku v ktorejkoľvek krabičke s nepárnym číslom 1, 3 alebo 5, tak počas týchto troch tipovaní sa trikrát presunie. Teda z nepárnej krabičky pôjde do párnej, z nej do nepárnej a nakoniec sa presunie do do párnej krabičky. Teda ak bol úplne na začiaku v nepárnej krabičke, tak po troch ťahoch skončí v krabičke 2 alebo 4 a môžeme použiť spôsob, ktorý sme už našli vyššie na to, aby sme ho dohľadali: 2, 3, 4.

Teda jednoznačný postup, ktorý nám zabezpečí nájdenie kľúča je napr: 2, 3, 4, 2, 3, 4.