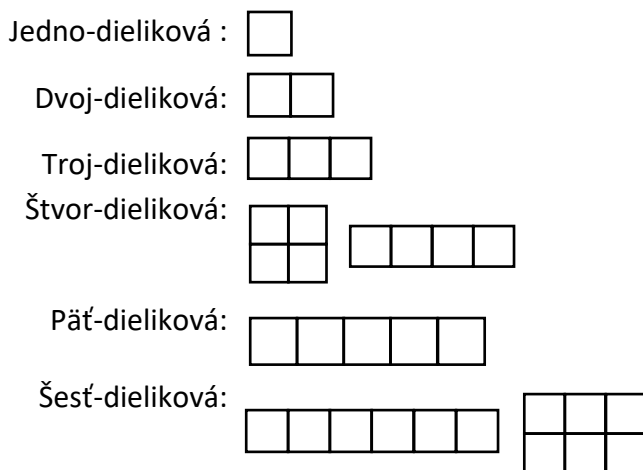




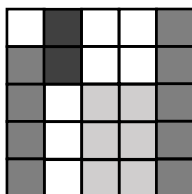
JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVII. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG
S E Z A M, Školský rok 2023/2024, 1. letná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravovala Erika Novotná)

Chceme zistiť, aká najmenšia obdĺžniková podlaha sa dá rozdeliť na 7 navzájom rôznych obdĺžnikových častí. Skúsme si najskôr nakresliť, ako by tieto časti mohli vyzeráť. Keďže ideme hľadať najmenšiu takú oblasť, začnime od najmenších častí:



Ak by sme použili 7 najmenších častí z vyššie nakreslených, mal by takýto útvar dokopy $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 = 25$ dielikov, teda by to musel byť štvorec 5×5 . Takýto štvorec (obdĺžnik) sa dá postaviť napríklad tak, ako vidíte na obrázku:



Najmenšia podlaha teda má obsah 25 dielikov a rozmer 5×5 .

Poznámka: Niektorí z vás uvažovali o tom, že podlaha nemohla byť štvorec 5×5 , namiesto toho ste hľadali obdĺžnik 2×13 . V zadaní sme síce napísali, že aj štvorec považujeme za obdĺžnik, no túto vlastnosť ste prevzali len pre obdĺžnikové časti podlahy. Ak by ste sa v budúcnosti stretli s takouto situáciou, keď si nie ste istí, skúste využiť jednu z týchto dvoch možností:

- Pýtajte sa: Na stránke SEZAMu v časti Fórum sme vám k dispozícii, aby sme vám zadania upresnili. V súťažných kolách matematickej olympiády je vám k dispozícii dozor, ktorý vám v prípade otázok rád pomôže.
- Napíšte viac: Ak sa nemôžete spýtať a druhé riešenie predstavuje len malý doplnok, kľudne ho napíšte formou: „Ak štvorec 5×5 nerátame za obdĺžnik, tak potom bude riešením obdĺžnik 2×13 ...“. Takouto odpoveďou máte pokryté obe vetvy riešenia a ukazujete, že úlohu dopočítať viete – problém sa vyskytol len v tom, ako interpretujete zadanie.

Úloha č. 2 (opravovala Vierka Glevitzká)

V každej podúlohe potrebujeme niekoľko orieškov do vrecúšok doplniť. Skúsme sa najprv pozrieť na to, či je vôbec teoreticky možné toľko orieškov doplniť pomocou uvedených pravidiel.

Pri piatich vrecúškach máme na začiatku dokopy 15 orieškov vo vrecúškach ($1 + 2 + 3 + 4 + 5$) a chceme ich mať na konci dokopy 25 ($5 \cdot 5$). Potrebujeme teda dokopy pridať 10 orieškov. Pomocou prvého pravidla vieme pridať dokopy 6 orieškov a pomocou druhého pravidla vieme dokopy odobrať 4 oriešky. Pridať 10 orieškov by sme teoreticky mohli, keďže $10 = 6 + 6 + 6 - 4 - 4$. Dokopy teda vieme pridať 10 orieškov, keď použijeme 3-krát prvé pravidlo a 2-krát druhé pravidlo. Vieme ale takto aj dosiahnuť, aby bolo v každom vrecúšku 5 orieškov? Poďme to skúsiť.

1	2	3	4	5
+3	+2	+1		
4	4	4	4	5
+3	+2	+1		
7	6	5	4	5
	+1	+2	+3	
7	7	7	7	5
-2	-2			
5	5	7	7	5
		-2	-2	
5	5	5	5	5

Toto je teda postup, ako pripraviť krmivo pre 5 vrecúšok.

Pri šiestich vrecúškach máme na začiatku dokopy 21 orieškov ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$) a chceme ich mať na konci dokopy 36 ($6 \cdot 6$). Potrebujeme teda dokopy pridať 15 orieškov. Keď ale budeme používať pravidlá zo zadania, tak vieme iba pridať 6 orieškov alebo odobrať 4 oriešky. Čísla 6 a 4 sú párne, a teda z nich vieme vyskladať iba párne čísla, keďže sčítaním alebo odčítaním dvoch párnych čísel dostaneme vždy iba párne číslo. Nevieme teda pridať 15 orieškov, lebo číslo 15 je nepárne, a teda ho nevieme vyskladať z čísel 6 a -4 .

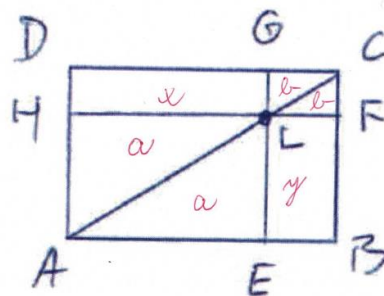
Pri siedmych vrecúškach máme na začiatku dokopy 28 orieškov ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$) a chceme ich mať na konci dokopy 49 ($7 \cdot 7$). Potrebujeme teda dokopy pridať 21 orieškov. Číslo 21 je ale znova nepárne. Preto ho (podobne ako pri šiestich vrecúškach) nevieme vyskladať z čísel 6 a -4 .

Pre 6 a 7 vrecúšok krmivo teda nevieme pripraviť.

Úloha č. 3 (opravoval Hynek Bachratý)

Príklad sa Vám podarilo zvládnuť väčšinou veľmi dobre, aj keď spôsoby vysvetlenia sa mierne líšili.

Prvý a častejší vidíme na prvom obrázku. Máme porovnať veľkosť obsahu obdĺžnika AEGD a ABFH. Keďže oba obsahujú spoločný obdĺžnik AELH, stačí porovnať obsahy obdĺžnikov HLGD a EBFL, ktoré som označil x a y .



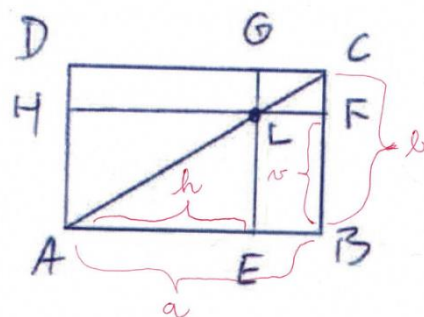
Teraz si uvedomíme kľúčovú vec, že každý obdĺžnik je svojou uhlopriečkou rozdelený na dva zhodné trojuholníky, ktoré tým pádom majú aj rovnaký obsah. To platí pre veľký obdĺžnik ABCD a dva trojuholníky ABC a ACD, ale aj menší obdĺžnik AELH rozdelený na AEL a ALH. Zhodné obsahy týchto trojuholníkov som označil a . Podobne pre obdĺžnik LFCG dostaneme zhodné trojuholníky LFC a LCG, ich zhodné obsahy som označil b . Teraz už jednoducho odvodíme (dá sa to zapísať aj inými spôsobmi), že:

$$S_{ABC} = a + b + y = S_{ACD} = a + b + x$$

a po odstránení rovnakých plôch a teda rovnakých písmenok z rovnice dostaneme $y = x$.

Teda obdĺžniky HLGD a EBFL a potom aj AEGD a ABFH majú rovnaký obsah.

Druhý spôsob, keď dostanete ten správny nápad, je ešte jednoduchší. Teraz sme na obrázku označili rozmery veľkého obdĺžnika $|AB| = a$, $|BC| = b$, a rozmery týkajúce sa trávnatých obdĺžnikov $|AE| = h$, $|BF| = v$. Ďalej si všimneme, že trojuholníky ABC a AEL sú podobné, lebo sú oba pravoúhle a majú spoločný a teda rovnaký uhol pri vrchole A. Z podobnosti ale platí, že $a/b = h/v$, z čoho po úprave dostaneme $a \cdot v = b \cdot h$. To je ale presný výpočet obsahu obdĺžnikov ABFH a AEGD pomocou dĺžok ich strán, a vidíme, že nám vyšiel rovnaký výsledok.



Úloha č. 4 (opravoval Janči Jakubík)

Pri opravovaní Vašich riešení som si všimol, že viacerých z Vás oklamala kalkulačka. Kalkulačka je dobrý nástroj, ktorý uľahčuje matematické operácie, ale ak si nedáte pozor, tak Vás oklame napríklad tým, že 0,66 zaokrúhli na 0,7. Preto si dávajte v budúcnosti pozor na to, za akým účelom kalkulačku používate.

K riešeniu príkladu sa dalo pristúpiť viacerými spôsobmi. Pre vzorové riešenie som vybral netradičnejší postup riešenia, lebo sa pri ňom musíme viac zamýšľať, ale o to menej nám potom treba písať :-)

Ak uvažujeme, že poznáme 10 rôznych cifier (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9), tak čisto teoreticky by nám mohlo vzniknúť heslo maximálne 10 cifier dlhé.

Skúsme sa zamyslieť nad tým, aké cifry sa v hesle nikdy neobjavia. Ako pri delení tvoríme desatinnú časť? Ako prvé si určíme celočíselný zvyšok po delení deliteľom. Napríklad $149 : 7 = 21$ a celočíselný zvyšok 2 (ďalej slovíčko celočíselný budeme vynechávať). Zatiaľ teda zapíšeme podiel ako 21, (a desatinná čiarka). Pre získanie desatinnej časti podielu teraz zvyšok vynásobíme 10 (krát 10 pre desatiny, desatiny krát 10 pre stotiny atď...) a pokračujeme v delení $20 : 7 = 2$ a zvyšok 6. Ako prvú cifru za desatinnú čiarku zapíšeme cifru 2 a pokračujeme so zvyškom 6, ktorý zasa vynásobíme 10 a proces opakujeme. Takto pokračujeme až pokiaľ nám nevyjde zvyšok 0, čo znamená, že už nemáme čo deliť a operácia delenia je skončená. Je možné, že neskončíme nikdy.

Položme si otázku: Aké všetky zvyšky nám môžu vzniknúť, ak delíme akékoľvek číslo číslom 7? Bude tento celočíselný zvyšok väčší alebo rovný číslu 7? Odpoveď je: Nie nebude, lebo ak by to tak bolo, tak sme sa pri delení niekde pomýlili. Pre overenie si môžete vyskúšať niekoľko rôznych delení a pouvažovať nad nimi. Z toho nám vyplýva, že všetky možné zvyšky po delení akéhokoľvek čísla číslom 7 sú 0, 1, 2, 3, 4, 5 a 6.

Tieto zvyšky sa nám môžu objaviť pri „tvorení desatinnej časti podielu“ a pre získanie ďalšej cifry v podieli by sme ich násobili 10 a následne delili 7.

Vyzeralo by to takto:

$0 : 7 = 0 \rightarrow$ Delenec 0 znamená že sme skončili s operáciou delenia a teda podiel 0 (cifra 0) sa nebude nikdy nachádzať medzi ciframi v desatinnej časti podielu

$10 : 7 = 1$ (a zvyšok 3) $\rightarrow$ Cifra 1 sa môže nachádzať v desatinnej časti podielu.

$20 : 7 = 2$ (a zv. 6) $\rightarrow$ Cifra 2 sa môže nachádzať v desatinnej časti podielu.

$30 : 7 = 4$ (a zv. 2) $\rightarrow$ Cifra 4 sa môže nachádzať v desatinnej časti podielu.

Cifra 3 sa nemôže nachádzať v desatinnej časti podielu, lebo $3 \cdot 7 = 21$, a v tejto „desiatke“ je $4 \cdot 7 = 28$ k 30 bližšie. Ak sa spýtame koľkokrát najviac sa číslo 7 „zmestí“ do 30, tak odpoveďou je 4 a nie 3. Taktiež $30 - (3 \cdot 7) = 9 \rightarrow$ zvyšok po delení 7 je viac ako 7.

$40 : 7 = 5$ (a zv. 5) $\rightarrow$ Cifra 5 sa môže nachádzať v desatinnej časti podielu.

$50 : 7 = 7$ (a zv. 1) $\rightarrow$ Cifra 7 sa môže nachádzať v desatinnej časti podielu.

Cifra 6 sa nemôže nachádzať v desatinnej časti podielu, lebo $6 \cdot 7 = 42$, a v tejto „desiatke“ je $7 \cdot 7 = 49$ k 50 bližšie. Podobne ako pri cifre 3.

$60 : 7 = 8$ (a zv. 4) $\rightarrow$ Cifra 8 sa môže nachádzať v desatinnej časti podielu.

Cifra 9 sa nemôže nachádzať v desatinnej časti podielu, lebo $9 \cdot 7 = 63$, a 63 je viac ako 60.

Z toho sme teda zistili, že v akejkolvek desatinnej časti podielu po delení číslom 7 sa nikdy nebudú nachádzať cifry 0, 3, 6 a 9.

Na začiatku sme uvažovali s teoretickým maximálnym počtom možných cifier v desatinnej časti podielu. Teraz už vieme, že tento teoretický maximálny počet musíme zmenšiť o tie cifry, ktoré tam byť **nemôžu**, a teda upravený počet bude $10 - 4 = 6$. V desatinnej časti podielu sa teda môžu vyskytovať cifry 1, 2, 4, 5, 7 a 8.

Pre úplnosť riešenia ešte musíme nájsť aspoň jedno číslo ktoré bude mať po vydelení číslom 7 minimálne **6 rôznych** cifier v desatinnej časti podielu.

Ukazuje sa, že nemusíme dlho hľadať: $1 : 7 = 0,142857\ 142857\ \dots$ periodických (do nekonečna sa opakujúca postupnosť cifier 142857 presne v tomto poradí). V desatinnej časti tohto podielu sa nachádza presne **6** rôznych cifier, čo je (ako sme ukázali) zároveň aj maximálny možný počet rôznych cifier, ktoré sa môžu v tomto podieli nachádzať a žiadne ďalšie (iné) cifry sa v ňom nikdy nachádzať nebudú.

Ukázali sme, že Hagrid s Vydrídom vedia vyrobiť heslo s najväčšou dĺžkou 6 cifier.