



JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVII. ročník S E m i n á r a Z A u j í m a v e j M a t e m a t i k y
pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG
S E Z A M K O, Školský rok 2023/2024, 1. letná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravoval Peťo Novotný)

Výsledok súčinu je číslo väčšie ako 8000. Keby jednociferné číslo, ktorým násobíme trojciferné číslo na ľavej strane, bolo 8, či dokonca menšie ako 8, výsledok by určite bol menší ako 8000. Totiž aj pri najväčšom trojcifernom čísle 999 by to vyšlo maximálne $999 \cdot 8 = 7992 < 8000$. Násobiť teda nutne musíme číslom 9 a príklad môžeme prepísať na

$$* * * \cdot 9 = 8 * * 8.$$

Teraz si môžeme všimnúť poslednú cifru výsledku – tá je 8. Posledná cifra súčinu závisí len od súčinu posledných cifier činiteľov, teda hľadáme takú cifru *, že súčin $* \cdot 9$ končí cifrou 8. Ľahko vypíšeme všetky možnosti, veď sú to násobky čísla 9 ktoré poznáme z malej násobilky:

$$\begin{array}{lllll} 0 \cdot 9 = 0, & 1 \cdot 9 = 9, & 2 \cdot 9 = 18, & 3 \cdot 9 = 27, & 4 \cdot 9 = 36, \\ 5 \cdot 9 = 45, & 6 \cdot 9 = 54, & 7 \cdot 9 = 63, & 8 \cdot 9 = 72, & 9 \cdot 9 = 81. \end{array}$$

Vidíme, že osmičkou končí len $2 \cdot 9$, preto posledná cifra trojciferného čísla musí byť 2:

$$* * 2 \cdot 9 = 8 * * 8.$$

Nech už teraz doplníme prvé dve hviezdičky naľavo akokoľvek, výsledok bude určite končiť osmičkou, treba už len zabezpečiť, aby aj začínal osmičkou (a bol štvorciferný). Skúsme naľavo dosadiť najväčšie možné číslo: $992 \cdot 9 = 8928$. Vidíme, že výsledok začína osmičkou, teda sme našli prvý spôsob. Už len musíme číslo postupne zmenšovať a kontrolovať, či výsledok stále začína osmičkou:

$$\begin{array}{llll} 992 \cdot 9 = 8928, & 982 \cdot 9 = 8838, & 972 \cdot 9 = 8748, & 962 \cdot 9 = 8658, \\ 952 \cdot 9 = 8568, & 942 \cdot 9 = 8478, & 932 \cdot 9 = 8388, & 922 \cdot 9 = 8298, \\ 912 \cdot 9 = 8208, & 902 \cdot 9 = 8118, & 892 \cdot 9 = 8028, & 882 \cdot 9 = 7938. \end{array}$$

Posledný výsledok už začína sedmičkou a ďalej teda nemusíme počítať – výsledok sa bude už len zmenšovať.

Celkom teda existuje 11 rôznych spôsobov, ako hviezdičky doplniť.

Poznámka: Záverečné vypisovanie sa dá skrátiť tým, že vypočítame podiel $8000 : 9 = 888, 888 \dots$ Tým zistíme, že výsledok násobenia $* * 2 \cdot 9$ začína osmičkou práve vtedy, keď trojciferné číslo $* * 2$ je väčšie ako 888. Je teda jasné, že vyhovujú práve čísla 892, 902, 912, ..., 992, ktorých je 11.

Úloha č. 2 (opravovala Kačka Bachratá)

V tejto úlohe ste všetci veľmi pekne rysovali a pracovali s kružidlami. S dobre zastrúhanou ceruzkou a ostrým kružidlom to išlo trochu ľahšie a presnejšie. Tí s tupšími ceruzkami to mali ťažšie, ale zvládli to tiež. V príklade ste síce nemuseli písať postup, ale niekoľkí ste ho napísali. Potešilo nás to, vďaka tomu sme vám lepšie rozumeli, **ďakujeme**.

Úloha č. 3 (opravovali Ajka Kucharíková a Lili Chovancová)

Našou úlohou je nájsť tri prirodzené čísla pre Huia, Duia a Luia tak, aby súčin ich rozdielov bol nepárne číslo.

Skúsme nejaké náhodné tri čísla, napríklad 9, 2 a 5. Ich rozdiely sú $9 - 2 = 7$, $5 - 2 = 3$, $9 - 5 = 4$ a súčin týchto rozdielov je $7 \cdot 3 \cdot 4 = 21 \cdot 4 = 84$. Keďže 84 je párne číslo, tak toto nie je dobré riešenie. Môžeme si však všimnúť, že $7 \cdot 3 = 21$ ešte bolo nepárne a nepárnosť nám pokazilo až násobenie 4-kou. Toto platí aj všeobecne – keď násobíme hocikaké číslo párnym číslom, tak bude výsledok párný (rozmyslite si prečo). Teda ak je aspoň jeden z rozdielov párný, tak už bude aj ich súčin párný.

My potrebujeme, aby výsledný súčin bol nepárny, teda všetky tri čísla (rozdiely) musia byť nepárne. Tu sa dalo postupovať rôzne. Napríklad si môžeme napísať tri nepárne rozdiely a hľadať k nim pôvodné čísla, ktoré by pasovali. Po chvíli skúšania však stále nevieme nájsť vhodnú trojicu. Skúsime to teda urobiť naopak a pokúsime sa vysvetliť, že to nejde.

Pozrime sa ako sa správa parita čísel pri odčítaní, keďže pracujeme s rozdielmi. Platí, že (rozmyslite si prečo):

A) Párne – Párne = Párne

B) Nepárne – Nepárne = Párne

C) Párne – Nepárne = Nepárne

D) Nepárne – Párne = Nepárne

Teraz sa pozrime, akú môžu mať paritu tri pôvodné čísla vybrané káčermi (označme párne písmenom P a nepárne písmenom N). Môžu byť všetky tri párne (PPP), všetky tri nepárne (NNN), alebo 1 párne a 2 nepárne (PNN), alebo 2 párne a 1 nepárne (PPN). Iná možnosť už nie je.

Ak sú všetky **tri párne (PPP)**, tak aj všetky tri rozdiely sú párne (z A). Potom aj ich súčin je párný.

Ak sú všetky **tri nepárne (NNN)**, tak aj tu sú všetky tri rozdiely párne (z B). Potom aj ich súčin je párný.

Ak je **1 párne a 2 nepárne (PNN)**, tak dva rozdiely síce budú nepárne $P - N = N$ alebo $N - P = N$, ale rozdiel dvoch nepárnych čísel bude párný $N - N = P$ (z B). Teda aj ich súčin je párný.

A ak sú **2 párne a 1 nepárne (PPN)**, tak dva rozdiely síce budú nepárne $P - N = N$ alebo $N - P = N$, ale rozdiel dvoch párných čísel bude párný $P - P = P$ (z A). Teda aj ich súčin je párný.

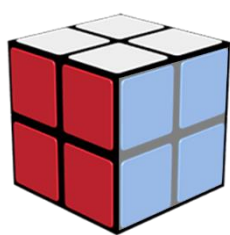
Prešli sme všetky možnosti, akú mohli mať paritu čísla káčerov a vždy nám vyšiel párný súčin.

Takže nech robia káčeri čo robia, vždy dostanú len 1 grošové vreckové.

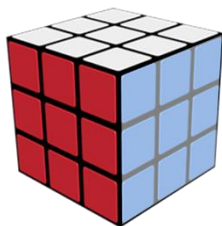
Poznámka: Bol tu jeden super nápad, že môžu skúšať veľké čísla a dúfať, že sa strýko Držgroš pomýli pri počítaní.

Úloha č. 4 (opravovali Kika Ďuračíková a Matej Halama)

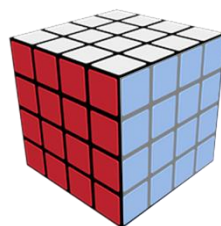
Rozrezané ozdoby niektorým z vás pripomínali Rubikovu kocku. Ako môže vyzeráť taká rozrezaná ozdoba?



$2 \times 2 \times 2 = 8$ kociek



$3 \times 3 \times 3 = 27$ kociek



$4 \times 4 \times 4 = 64$ kociek

...

V prvej ozdobe je všetkých 8 kociek ofarbených inak. Všetky majú tri vnútorné steny biele a tri steny ofarbené nejakou inou kombináciou troch povrchových farieb.

Ako je to v druhej ozdobe? **8 rohových kociek** je podobných ako v predošlom prípade. Pribudlo ešte **12 kociek, ktoré sú v strede hrán**. Tieto kocky majú štyri steny biele a zvyšné dve steny sú ofarbené nejakou inou dvojicou farieb. Ďalej máme **6 kociek, ktoré sú v strede stien**. Tieto kocky majú päť bielych stien a jednu stenu ofarbenú vždy nejakou inou farbou. A nakoniec ešte **1 kocka vo vnútri ozdoby**, ktorá je celá biela. To je dohromady $8 + 12 + 6 + 1 = 27$ rôznych kociek.

V tretej ozdobe sú niektoré kocky rovnako ofarbené. Všetkých **8 rohových kociek** je odlišných. V strede každej hrany sú dve rovnaké kocky, preto máme len **12 rôzne ofarbených kociek zo stredu hrán**. V strede každej steny sú 4 rovnaké kocky. Máme tak **6 odlišných kociek zo stredov stien**. Vo vnútri ozdoby je 8 kociek, ktoré sú celé biele, to nám pridá **1 odlišnú kocku vo vnútri ozdoby**. Dohromady je to opäť 27 rôznych kociek.

Ak by bola ozdoba narezaná na ešte viac menších kociek, napríklad $5 \times 5 \times 5$ alebo $6 \times 6 \times 6$, bolo by to podobné ako v prípade kocky narezanej na $4 \times 4 \times 4$. Pribudli by nám len také kocky, ktoré majú rovnaké ofarbenie ako niektoré iné.

Môžeme dostať 8 alebo 27 rôzne ofarbených malých kociek.