JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVII. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2023/2024, 2. letná séria

Vzorové riešenia

Úloha č. 1 *(opravovali Miška Rosinská a Maťka Gaňová)*

Zo zadania vieme, že trojuholník **PRQ** je rovnoramenný so základňou **PR**. V rovnoramennom trojuholníku majú uhly pri základni vždy rovnakú veľkosť. Uhly **QPR** a **PRQ** maju oba rovnakú veľkosť, ktorú si môžeme označiť **α**. Súčet uhlov v trojuholníku je vždy $180°$ a tak vieme vypočítať veľkosť uhla **SQP** ako $180° - \alpha - \alpha - 20° = 160° - 2\alpha$.

Zo zadania taktiež vieme, že aj trojuholník **TSQ** je rovnoramenný so základňou **TS**. Uhly **STQ** a **QST** majú teda rovnakú veľkosť. Keďže súčet vnútorných uhlov v trojuholníku **TSQ** je 180°, veľkosť uhlov **STQ** a **QST** vieme vypočítať ako $\frac{180° - (160° - 2\alpha)}{2} = \frac{180° - 160° + 2\alpha}{2} = \frac{20° + 2\alpha}{2} = 10° + \alpha$.

Uhol **PTQ** je priamy a má teda veľkosť $180°$. Uhol **STP** má potom veľkosť $180° - (10° + \alpha) = 180° - 10° - \alpha = 170° - \alpha$.

Trojuholník **PST** má súčet vnútorných uhlov 180° a teda hľadanú veľkosť uhla **TSP** vieme vypočítať ako $180° - \alpha - (170° - \alpha) = 180° - \alpha - 170° + \alpha = 10°$.

Uhol TSP má veľkosť $10°$.

Úloha č. 2 *(opravoval Adam Kňaze)*

Hľadáme najväčšie podpriemerné číslo, väčšina z vás teda začala tým, že ste zobrali cifru 9 a k nej pridávali ďalšie cifry tak aby vznikajúce číslo bolo stále podpriemerné. Takto objavíme prvé dôležité pozorovanie, konkrétne že snažiť sa poskladať čo najdlhšie číslo sa oplatí viac ako používať za každú cenu najväčšie možné cifry.

Napríklad ak začíname deviatkou a vedľa nej použijeme osmičku, ďalej môžeme do čísla pridať už len ďalšiu osmičku alebo deviatku. Najväčšie číslo ktoré takto dostaneme je **9889**. Ak namiesto osmičky dáme do čísla sedmičku ďalšie číslo môže byť šestka (lebo trojica **976** bude stále podpriemerná). Najmenšia cifra, ktorú môžeme ďalej pridať je 6, po nej 7 a nakoniec 9. Dostali sme tak podpriemerné číslo **976679**, ktoré je zjavne väčšie ako **9889**.

Tento postup môžeme opakovať aj ďalej, je však dosť prácny a ľahšie sa pri ňom dá pomýliť alebo zabudnúť vyskúšať všetky relevantné možnosti. Viacerí ste si tak neoverili či je číslo, ktoré ste našli naozaj najväčšie možné.

Poďme sa teda namiesto skúšania nad hľadanými číslami ešte zamyslieť. Na všetkých podpriemerných číslach, ktoré sme doteraz našli si môžeme všimnúť, že spĺňajú jednu podmienku: Začínajú sa veľkou cifrou, následne sa cifry postupne znižujú až v strede dosiahnu minimum a potom sa zase postupne zvyšujú až skončia zase veľkou cifrou. Keby si cifry nakreslíme do grafu dostaneme tvar písmena V alebo U, prípadne z pohľadu geografie to bude to nejaká dolina. Nikdy v takomto grafe nebudeme mať „kopec“, teda cifru ktorá susedí z oboch strán s menšími ciframi, lebo by potom nemohla byť menšia ako priemer jej susedov.

Ak teda postupne skladáme podpriemerné číslo zľava doprava, vždy bude platiť, že akonáhle pridáme na jeho koniec cifru väčšiu ako tá pred ňou, ďalšie pridané cifry budú musieť byť tiež už len väčšie (inak by vznikol v grafe kopec). To znamená, že cifry budeme môcť pridávať len kým nenarazíme na najväčšiu z nich – deviatku. Poďme teda zistiť koľko najviac cifier vieme takto pridať do čísla. Začneme najmenšou možnou, teda nulou. Vedľa nej môžeme dať ešte jednu nulu a potom musíme pridať aspoň jednotku aby bolo číslo podpriemerné – **001**. Ďalej už nemôžeme pridať dvojku (**0012** nespĺňa zadanie lebo priemer tretej cifry a jej susedov je rovnaký), musí tam byť aspoň 3, teda máme **0013**. Ďalej nestačí 4 ani 5, treba aspoň 6, čiže **00136**. Najväčšia cifra, ktorú vieme ešte pridať je 9, ani to však nestačí aby bolo číslo podpriemerné (**369** nespĺňa podmienku), vieme teda, že k najmenšej cifre vieme napravo do čísla pridať najviac štyri ďalšie cifry.

Keďže sme začínali najmenšou cifrou, vieme k nej pridať ešte nejaké cifry zľava – na začiatok čísla. Tu budeme postupovať rovnakým spôsobom a prídeme k číslu **63100136**. Vďaka tomuto postupu vieme s istotou povedať, že viac ako 8-ciferné podpriemerné číslo sa vytvoriť nedá.

Toto však nie je maximum, naše aktuálne podpriemerné číslo vieme ešte prekonať tým, že všetky jeho cifry zväčšíme o rovnakú hodnotu (zachováme tak jeho podpriemernosť). Najviac vieme všetky cifry zväčšiť o tri.

Dostaneme tak číslo 96433469. A toto už je najväčšie podpriemerné číslo aké existuje.

Úloha č. 3 (*opravovala Baška Marečáková)*

Úlohu ste riešili dvoma prístupmi, ktoré majú mnoho spôsob riešenia. Ukážeme si obidva prístupy, ale vrámci nich len jeden zo spôsobov, ako rozobrať možnosti.

Dobrým tipom pre ľahké spisovanie riešenia je označiť si sirény pomocou začiatočných písmen A, B, C a ich tvrdenia v poradí, napríklad A1: Mám 18 rokov. Toto tvrdenie možeme ešte prepísať na A = 18.

Zadané trvdenia by teda vyzerali nasledovne:

A1: $A = 18$	A2: $A + 2 = B$	A3: $A - 1 = C$
B1: $B > C$ a/alebo $B > A$	B2: $C - B = 3$ alebo $B - C = 3$	B3: $C = 21$
C1: $C < A$	C2: $C = 19$	C3: $B - 3 = A$

Prístup 1 - prejdem cez všetky možnosti klamstva pri jednej zo sirén

Pozrieme sa na tvrdenia sirény Carly, teda na C1, C2 a C3.

1. **Ak by bolo C1 klamstvo, C2 a C3 sú pravda:**

   Z nepravdy C1 vieme, že C nemôže byť menej ako A. To je v spore s tvrdením A3. Ktoré musí byť tiež klamstvo. Ak je A3 klamstvo, tak A1 a A2 musia byť pravda. Alice má 18 rokov podľa A1. Beatrice má 20 rokov podľa A2. Týmto máme 2 pravdivé tvrdenia a jedno nepravdivé.

   C3 musí byť pravdivé, teda Beatrice je o 3 roky staršia, ako Alice. To znamená, 20 – 3 = 17 rokov, ktoré sú však v rozpore s tvrdením A1, ktoré sme ukázali, že musí byť pravdivé a hovorí, že Alice má 18 rokov.

   Prišli sme ku sporu medzi C3 a A1 – nie je to riešenie.

2. **Ak by bolo C2 klamstvo, C1 a C3 sú pravda:**

   Z pohľadu na C3 a A2 vieme, že ak je C3 pravdivé, tak A2 musí byť nepravda. Platí, že A1 a A3 budú pravda, Alice má 18 rokov a Carla má 17 rokov. Z tvrdenia C3 vieme, že Beatrice má 21 rokov. Avšak tvrdenie B3 je nepravda, Carla nemá 21 rokov, a zároveň aj druhé tvrdenie Beatrice je nepravda, lebo rozdiel vekov Beatrice a Carly je 4.

   Prišli sme ku sporu pre dve nepravdivné tvrdenia B2 a B3 – nie je to riešenie.

3. **Ak by bolo C3 klamstvo, C1 a C2 sú pravda:**

   Musia byť tvrdenia C1 a C2 pravdivé, teda Carla má 19 rokov a je to menej, ako vek Alice. Z toho vyplýva, že A1 je nepravda, teda Alice nemôže mať 18 rokov. Zvyšné tvrdenia od Alice musia byť pravdivé. Čiže vieme povedať z A3, že Alice má 20 rokov. Následne z A2 vieme vek Beatrice, ktorý je 22 rokov. Potrebujeme ešte overiť tvrdenia u Beatrice. Beatrice je staršia, ako Alice aj Carla (B1 je pravda). Rozdiel vekov Beatrice a Carly sú 3 roky (B2 je pravda). Carla má 19 rokov a nie 21, teda B3 je nepravda.

   Alice má 20 rokov, Beatrice má 22 rokov a Carla má 19 rokov spĺňa všetky podmienky zo zadania o výrokoch.

   Týmto postupom sme prešli všetky možnosti, ktoré môžu nastať pre tvrdenia Carly. Ak by sme zanalyzovali tvrdenia inej sirény, tak určite musí byť riešenie len jedna zo situácií, kde niektoré tvrdenie Carly je nepravda.

Prístup 2 - pozriem sa na tvrdenia, ktoré si protirečia a možnosti ich pravdy a nepravdy

Carla nemôže mať naraz 19 rokov a 21 rokov. Musí teda platiť jedna z nasledovných situácií:

1. C2 je pravda, B3 je nepravda
2. C2 je nepravda, B3 je pravda
3. C2 aj B3 je nepravda

Zároveň vieme, že nemôže naraz platiť C3 a A2.

V prípade **1. možnosti** Carla má 19 rokov. Beatrice môže mať 16 rokov alebo 22 rokov podľa tvrdenia B2, ktoré musí byť pravda.

Ak by mala 16 rokov, znamená to, že Alice nemôže mať 18 rokov, lebo by Beatrice bola najmladšia a tvrdenie B1 by bola nepravda. Musí teda platiť, že A1 je nepravda. Z pravdivého tvrdenia A3 vieme povedať, že Alice má mať 20 rokov. Čo však stále nestačí, teda B1 je stále nepravda. Beatrice nemôže mať 16 rokov. Táto možnosť nie je riešením

Ak by mala Beatrice 22 rokov a Carla 19 rokov, tak z tvrdení Alice vieme, že by jej vek pre A1 mal byť 18 rokov, pre A2 20 rokov, pre A3 tiež 20 rokov. Jediná možnosť, kedy by bola iba jeden Alicin výrok nepravda je vtedy, ak má 20 rokov. Overte si ešte, či nám platí podmienka, že pre každú sirénu máme jednu nepravdu a 2 pravdy. Našli sme riešenie Alice má 20 rokov, Beatrice má 22 rokov a Carla má 19 rokov.

V prípade **2. možnosti** C3 musí byť pravdivá, teda A2 je nepravda. A1 a A3 musia byť pravdivé, čiže Alice má 18 rokov, Carla má mať 17 rokov a to je v spore s B3, teda Carla má mať 21 rokov. Táto možnosť nie je riešením.

V prípade **3. možnosti** už vieme povedať, že aj A2 je nepravda. Teda pravdivé tvrdenie je A1, Alice má 18 rokov. Následne vieme z A3, že Carla má 17 rokov a z C3, že Beatrice má 21 rokov. Problémom tejto možnosti je, že rozdiel veku Beatrice a Carly je 4 a nie 3, ako je tvrdenie B2, ktoré má byť pravda. Táto možnosť nie je riešením.

Jediným riešení po rozbore všetkých možností je ak druhý výrok Carly je pravdivý a tretí výrok Beatrice je nepravda - Alice má 20 rokov, Beatrice má 22 rokov a Carla má 19 rokov.

Úloha č. 4 (*opravoval Matúš Hladký****)***

V úlohe potrebujeme nájsť najväčší počet nepárnych lízaniek, ktoré vieme zostreliť tak, aby všetky zostrelené mali dohromady súčet 5000. Začneme preto sčítavať postupne najmenšie nepárne čísla od jednotky. Postup sčítavania môže byť rôzny, no vieme si prácu ušetriť ak si všimneme istý vzor v nepárnych číslach.

Prvých päť nepárnych čísiel dá 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25. Druhých päť je spolu 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 75. Vieme si všimnúť, že druhých päť čísiel je rovnakých ako prvých päť, len sú väčšie o 10. Tretích päť bude zase väčších o 10 od druhých piatich a tak to bude pokračovať. Súčty takýchto pätíc preto budú narastať po 50. Postupne teda pätice budú mať súčty 25, 75, 125, 175, 225, 275, 325, 375, 425, 475, 525, 575, 625, 675, … . Ak sčítame všetky súčty po 675, dostane súčet 4900. To je súčet prvých (14 · 5 = 70) sedemdesiat nepárnych čísiel. Lebo sme sčítali trinásť pätíc.

Keďže sedemdesiate nepárne číslo je 139, tak ak by sme pripočítali ešte sedemdesiate prvé, tak by sme prekročili hranicu 5000. Keďže sme brali tie najmenšie nepárne, tak viac ich určite zobrať nevieme. Máme teda 70 lýzaniek s nepárnymi číslami. Dohromady ich ale musíme mať 80 so súčtom 5000, takže ešte potrebujeme doplniť 10 párnych lízaniek so súčtom 100. Ak zoberieme 10 najmenších párnych čísiel, tak dostaneme (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 110) stodesať ale 4900 + 110 je viac ako 5000. Preto 70 lízaniek získať nevieme.

Vyskúšajme teda o jednu lízanku menej, takže šesťdesiatdeväť. Ak ale spočítame nepárny počet nepárnych čísiel, dostaneme nepárny výsledok. Ak k nepárnemu číslu pripočítame hocikoľko párnych, vždy dostaneme nepárne. To znamená, že so šesťdesiatdeväť nepárnymi číslami nemôžeme dostať súčet 5000. Preto ani šesťdesiatdeväť lízaniek si deti nevedia odniesť.

Vyskúšajme šesťdesiatosem nepárnych čísiel. Aby sme ukázali, že deti si toľko lízaniek vedia odniesť, stačí nám nájsť jeden spôsob ako vybrať osemdesiat lízaniek so súčtom 5000, pričom šesťdesiatosem z nich bude nepárnych. Už vieme, koľko má súčet prvých sedemdesiat nepárnych čísiel, takže nám stačí od neho odčítať dve najväčšie zarátané a budeme mať súčet prvých šesťdesiadosem nepárnych čísiel. To je 4900 − 139 − 137 = 4624. (Nemuseli by sme nezostreliť zrovna dve lízanky s najväčším číslom z tých prvých sedemdesiat nepárnych. Vyskúšajte nájsť riešenie ak by sme vynechali niektoré iné.) Preto zvyšných dvanásť párnych čísiel musí mať súčet 5000 − 4624 = 376. To môžeme dosiahnuť napríklad ak by sme zostrelili 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 244.

Najviac si deti vedia odniesť šesťdesiatosem lízaniek označených nepárnymi číslami. Musia na to trafiť napríklad všetky nepárne čísla od 1 po 135, všetky párne čísla od 2 po 22 a 224.