



JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXIX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG
S E Z A M, Školský rok 2024/2025, 3. letná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravovala Maťka Gaňová)

Najskôr sa skúsime zamyslieť, či vieme určiť, do ktorej rodiny patrila prvý hovoriaci. Ak by bol Bulettovec, tak musí byť jeho druhá veta, že všetci sú Curtissovci pravda, ale to nesedí s tým, že sám je Bulettovec. Preto musí byť Curtissovec a obe jeho vety budú klamstvá. Vieme teda, že sú tam viac ako traja ľudia a nie všetci sú Curtissovci.

Keďže nie všetci sú Curtissovci, tak druhá veta druhého hovoriaceho je pravda, a on musí byť Bulettovec. Z jeho prvej vety potom vieme, že sú tam najviac štyria ľudia. Ak sú tam viac ako traja a najviac štyria, musia tam byť práve štyria.

Tretieho prvá veta tvrdí, že sú tam piati, takže musí klamať. Teda tretí musí byť Curtissovec. Jeho druhá veta je potom tiež klamstvo a Curtissovci tam nie sú traja.

Zatiaľ vieme, že v miestnosti sú štyria ľudia, z toho sú dvaja Curtissovci (prvý a tretí) a jeden Bulettovec (druhý). Aby tam neboli traja Curtissovci, ten štvrtý musí byť Bulettovec.

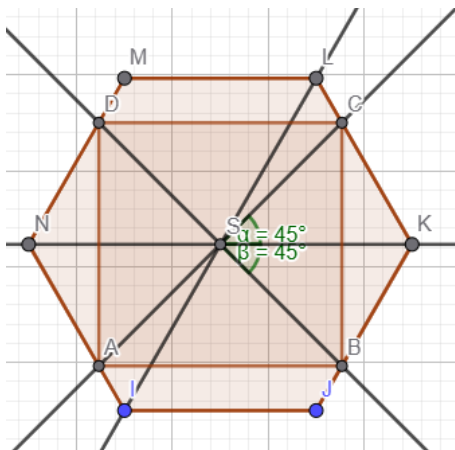
V miestnosti sa stretli 4 ľudia – 2 Bulettovci a 2 Curtissovci.

Úloha č. 2 (opravoval Miro Hudec)

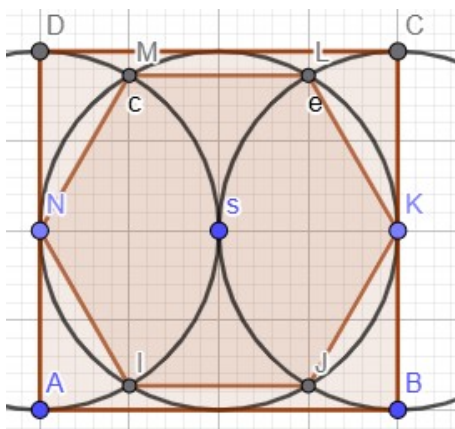
Najskôr vyriešime problém vpísania štvorca do 6-uholníka. Začnime zhrnutím vlastností štvorca, ktoré plánujeme využiť pri jeho konštrukcii (teda nie všetkých, ktoré má). Konkrétne, že jeho uhlopriečky sú na seba kolmé, že sa pretínajú v bode, ktorý nazveme stred (**S**), a že vzdialenosť každého z vrcholov od bodu **S** je rovnaká. My si teda najprv nájdeme vhodný bod **S**, následne nim preložíme 2 navzájom kolmé priamky tak, aby ich priesečníky so 6-uholníkom boli rovnako vzdialené od **S**. A to budú vrcholy nášho štvorca.

Bod **S** nájdeme ľahko, bude to stred samotného 6-uholníka a získame ho tak, že spravíme 2 uhlopriečky (priamka **u**, na ktorej ležia body **K** a **N**, a priamka **v**, na ktorej ležia body **I** a **L**).

Uhlopriečky štvorca (priamky **k**, **l**) narysujeme tak, aby zvierali 45° uhol s **u**. Prečo? Lebo **u** je osou súmernosti 6-uholníka a ak chceme, aby $|SB| = |SC|$, tak **u** musí byť osou uhla **BSC**. Tento uhol má 90° (uhlopriečky štvorca sú na seba kolmé), polovička je 45° .



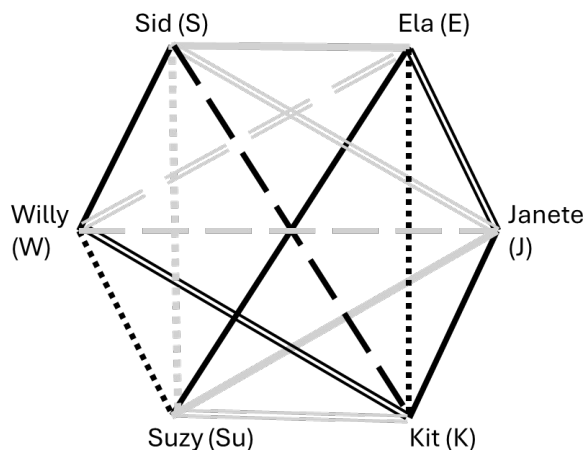
Horšie je to so 6-uholníkom v štvorci. Pravidelný 6-uholník do štvorca vpísať nevieme. Na niektorých (konkrétne dvoch protiľahlých) stranách štvorca by museli ležať po 2 vrcholy 6-uholníka a na zvyšných stranách štvorca po jednom. Pre tie s iba jedným vrcholom 6-uholníka platí, že by musel byť v strede strany štvorca, lebo oni definujú uhlopriečku 6-uholníka, ktorá je zároveň osou súmernosti (tieto dva body by zodpovedali bodom **N** a **K** z predchádzajúceho obrázka). A keď následne skúsime zostrojiť pravidelný 6-uholník z týchto 2 bodov, tak zistíme, že jeho skutočné vrcholy ležia mimo štvorca.



Úloha č. 3 (opravovala Kika Ďuračíková)

Okolo stola sedelo okrem Sida ešte 5 ľudí. Všetci si museli po jednom podať ruky so Sidom, to zabralo minimálne 50 sekúnd. Posledný, čo si s ním podal ruku, si dovededy nemohol podávať ruky s nikým iným. Až potom si podal ruku s ostatnými štyrmi, čo sedeli okrem neho a Sida za stolom. To mu zabralo minimálne ďalších 40 sekúnd. Dohromady teda potrebujú minimálne 90 sekúnd. Dá sa to ale za tých 90 sekúnd vôbec stihnúť? Existuje viacero riešení, skoro všetkým sa vám podarilo nejaké nájsť. Značili ste ho väčšinou do tabuľky, alebo do obrázku, v ktorom sa nepretínali čiary rovnakej farby, mohlo to vyzeráť takto:

Podanie rúk	Kto si s kým podal	V obrázku
1	S+K	— —
2	S+Su	
3	S+J Su+K	==
4	S+E Su+J	==
5	S+W Su+E J+K	=====
6	W+K E+J	=====
7	W+Su E+K	
8	W+J	== == ==
9	W+E	== ==



Najrýchlejšie môže podávanie rúk prebehnúť za 90 sekúnd.

Úloha č. 4 (opravoval Hynek Bachratý)

Aby sa nám vzorové riešenie lepšie čítalo, hneď na začiatku „prezradíme“ správnu odpoveď. Vyhrávajúcu stratégiu má Janete. Znamená to, že môže hrať takým spôsobom (môžeme tiež povedať systémom), ktorý jej zaručí výhru v každom prípade, bez ohľadu na to, ako hrá Kit. Musí ale správne reagovať na jeho ťahy a v našej úlohe tiež správne začať. Než si jej stratégiu popíšeme presne, vysvetlíme si niekoľko všeobecných vlastností ich hry.

Skoro všetci si všimli, že pri dopĺňaní 99 znamienok má Janete výhodu nie len prvého, ale aj posledného ťahu (pod „ťahom“ rozumieme zapísanie zvoleného znamienka na zvolené miesto). To naznačuje, že jej šance na výhru by mohli byť väčšie, a je to aj pravda. Musí ale správne využiť už svoj prvý ťah. Keby sa spoľahla len na posledný, Kit jej vie pripraviť situáciu, kedy jej to už nepomôže.

Tak isto je ale pravda, že hlavne pri násobení majú párne čísla „lepšiu“ pozíciu ako nepárne. Platí $P \cdot P = P \cdot N = N \cdot P = P$, ale len $N \cdot N = N$. To na prvý pohľad pomáha Kitovi, ale dobrým prvým ťahom si túto pomoc vie Janete získať na svoju stranu. Aj tu je vidieť, že riešenie úlohy sa veľmi zjednoduší, ak miesto hodnôt čísel využijeme len to, či sú **Párne** alebo **Nepárne**.

Pre istotu si ešte pripomenieme, ako sa na konci hry po doplnení všetkých znamienok vypočíta hodnota výrazu. Pretože násobenie má prednosť pred sčítaním, najskôr sa vynásobia všetky úseky (niektorí ste ich nazvali skupinky alebo ostrovy) spojené znamienkom „ $\cdot$ “, a tie sa potom sčítajú na základe znamienok „ $+$ “. A hneď teraz si vysvetlíme, že každý úsek spojený znamienkami „ $\cdot$ “ je párný. Párne a nepárne čísla sa totiž v našej úlohe striedajú a už prvé „ $\cdot$ “ vytvorí „násobiaci ostrov“, ktorý bude párný.

Teraz je už správny čas vysvetliť a zdôvodniť, ako si Janete môže zabezpečiť istú výhru v ich hre. Stačí, ak v prvom ťahu dá „ $+$ “ medzi 1 a 2. Tým do celkového výsledku získala jedno nepárne číslo ($1 + \dots$) a stačí jej zabezpečiť, aby zvyšok výrazu bol párný.

Kit by jej to mohol pokaziť len tak, že by pričítal iné nepárne číslo vytvorením úseku typu „ $\dots + N + \dots$ “. Tomu ale Janete ľahko zabráni. Vždy, keď Kit dá „ $+$ “ k nejakému nepárnemu číslu, Janete dá z druhej strany (ak tam už nie je) znamienko „ $\cdot$ “. Tým toto nepárne číslo pridá do násobiaceho úseku, ktorý bude vždy párný. (Pokiaľ Kit urobí iný ťah, Janete môže na ľubovoľné miesto pridať „ $\cdot$ “ a určite si tým svoju stratégiu nepokazí.) Nakoniec teda Janete získa výraz typu $1 + P + \dots + P = N$ (P budú rôzne párne násobiace úseky) a v hre vyhrá.

Poznámka:

Nakoniec ešte pár poznámok k niektorým vašim riešeniam. Pokiaľ vám vyšlo, že vždy vyhrať môže Kit, najčastejšie ste si nevšimli Janetin vyhrávajúci prvý ťah „ $1 + \dots$ “.

Ak ste pre výhru Janete chceli využiť len jej posledný ťah, to jej už nemusí pomôcť. Ak by hral Kit najlepšie ako vie, na koniec by jej mohol pripraviť situáciu $P + \dots + P ? P + P \dots$ (P sú párne násobiace skupinky). Janete by potom doplnenie „ $?$ “ za „ $+$ “ ani „ $\cdot$ “ už nepomohlo, výsledok by bol párný a vyhral by Kit.

Pre úplnosť ešte doplníme, že Janete by mohla spoľahlivo vyhrať aj zložitejšími systémami, kedy by si pripočítanie jedného „ $+ N +$ “ zabezpečila iným spôsobom. Ale systém „ $1 + \dots$ “ je jednoduchý a prehľadný, a bola by ho škoda nevyužiť.