

JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXIX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG
S E Z A M, Školský rok 2025/2026, 1. zimná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravoval Matej Halama)

Máme zadaný palindróm 135797531, teda číslo, ktoré sa číta aj zľava aj sprava rovnako. Pre naše 9-ciferné číslo to znamená, že prvá cifra zľava (L) je rovnaké ako prvá cifra sprava (P), druhá zľava je rovnaké ako druhá sprava, tretia zľava je rovnaké ako tretia sprava, štvrtá zľava je rovnaké ako štvrtá sprava a piata zľava aj piata sprava sú rovnaké číslo a toto číslo sa nachádza v strede.

1	3	5	7	9	7	5	3	1
1. L	2. L	3. L	4. L	Stred	4. P	3. P	2. P	1. P

Našou úlohou je nájsť dva palindrómy, väčší a menší od zadaného palindrómu, také aby ich rozdiel bol čo najmenší. Preto hľadáme čo najmenší palindróm, ktorý je väčší ako pôvodný a čo najväčší palindróm, ktorý je menší ako pôvodný.

Začnime s hľadaním menšieho palindrómu. Ak by sme chceli číslo, ktoré nie je palindróm zmenšiť čo najmenej odčítali by sme od neho 1, teda zmenili cifru prvú sprava $\rightarrow$ 135797530. Pre palindróm to ale neplatí, pretože prvá zľava musí byť rovnaká ako prvá sprava $\rightarrow$ 035797530 (toto číslo nie je palindróm, pretože ako číslo to je 35797530). V tom prípade by rozdiel nebol 1 ale $135797531 - 35797530 = 100000001$.

Vyskúšajme si o koľko by sa číslo zmenšilo ak zmeníme rozdielne cifry v čísle o 1:

$$1.L \text{ a } 1.P \rightarrow 135\,797\,531 - 35\,797\,530 = \mathbf{100\,000\,001}$$

$$2.L \text{ a } 2.P \rightarrow 135\,797\,531 - 125\,797\,521 = \mathbf{10\,000\,010}$$

$$3.L \text{ a } 3.P \rightarrow 135\,797\,531 - 134\,797\,431 = \mathbf{1\,000\,100}$$

$$4.L \text{ a } 4.P \rightarrow 135\,797\,531 - 135\,696\,531 = \mathbf{101\,000}$$

$$\text{Stred} \rightarrow 135\,797\,531 - 135\,787\,531 = \mathbf{10\,000}$$

Najmenší rozdiel nastane, keď zmeníme cifru v strede čísla, druhý najmenší keď zmeníme 4.L a 4.P, následne 3.L a 3.P a tak ďalej. Preto ak chceme nájsť najväčší palindróm, ktorý je menší od zadaného, zmeníme v zadanom palindróme strednú cifru o 1, teda 9 na 8 $\rightarrow$ **135787531**.

Následne chceme nájsť väčší palindróm. Ten taktiež chceme zmeniť čo najmenej od zadaného palindrómu, preto chceme zmeniť cifry najbližšie ku stredným cifrám čísla.

Strednú cifru nemôžeme len tak zväčšiť o 1, pretože 9 je najväčšie jednociferné číslo. Zmeníme teda cifry 4.L a 4.P o 1 zo 7 na 8 $\rightarrow$ 135898531, pretože je to druhá najmenšia možnosť pri zmene čísla. Toto ale nie je najmenší väčší palindróm, pretože vieme ešte zmenšiť cifru v strede, tak ako sme to urobili pri hľadaní menšieho palindrómu. Aj keď strednú cifru zmeníme z 9 na 0 $\rightarrow$ **135808531**, výsledný palindróm je stále väčší ako zadaný. V tomto palindróme už nevieme zmenšiť žiadnu z cifier tak, aby zostal väčší ako zadaný palindróm, a preto je najmenší väčší palindróm.

Iný spôsob, akým by sme vedeli nájsť väčší a menší palindróm:

Vieme že náš palindróm má rovnaké cifry na prvých štyroch pozíciách (1.L až 4.L) a zároveň na posledných štyroch pozíciách (1.P až 4.P) a číslo v strede. Taktiež vieme že pri zmene čísla najviac zavážia cifry zľava pretože v čísle predstavujú sto milióny, desať milióny, milióny...

Preto si môžeme napísať náš palindróm ako prvé štyri cifry a stredovú cifru a po zmenení tohto čísla dostaneme palindróm tak, že prepíšeme prvé štyri cifry

$$(135797531 \rightarrow 13579[7531]).$$

Zadané číslo je 13579, ak chcem nájsť k nemu najbližšie väčšie a menšie číslo pripočítame/odčítame jednotku:

$$13\,579 + 1 = 13\,580 \rightarrow 135\,808\,531$$

$$13\,579 - 1 = 13\,578 \rightarrow 135\,787\,531$$

Na získanie kódu od seba odčítame tieto dva palindrómy tak, aby sme dostali kladný výsledok:

$$135\,808\,531 - 135\,787\,531 = 21\,000$$

Úloha č. 2 (opravoval Hynek Bachratý)

Riešenie tejto úlohy zvládla väčšina z vás, a tu si popíšeme váš najčastejší postup.

V prvom rade ste využili, že trojuholník je rovnostranný práve vtedy, keď má tri rovnaké uhly, a ich veľkosť je preto 60° . (To, že má aj rovnako veľké strany je tiež pravda, ale v tejto úlohe nám to moc nepomôže). Vieme teda 60° doplniť do obrázku ako vnútorné uhly trojuholníka XYZ, lebo to vieme zo zadania.

Zároveň to využijeme aj pri zdôvodnení toho, že $\triangle ABC$ je rovnostranný: vypočítame, že aj uhly pri jeho vrcholoch A, B a C majú 60° .

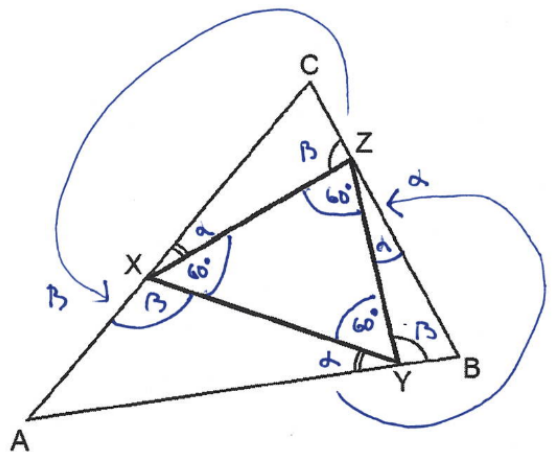
Aby sa nám ďalej lepšie vysvetľovalo, označili sme si zhodné uhly zo zadania ako α (číta sa alfa) a β (beta).

Teraz využijeme ďalšiu vec, a to že priamy uhol má vždy veľkosť 180° . To platí pre uhol AYB pri vrchole Y, a z toho zistíme, že $\alpha + 60^\circ + \beta$. To isté ale musí platiť pre uhol CZB pri vrchole Z. Tam máme zo zadania uhly že 60° a β , a teda do celkovo 180° ho môže doplniť len uhol α . A veľmi podobne pri vrchole X máme zo zadania uhly α a 60° , takže do priameho uhla ich musí dopĺňať uhol β .

Keď sa teraz pozrieme na $\triangle AYX$, $\triangle YBZ$ a $\triangle XZC$, vidíme, že v každom z nich je jeden uhol α , jeden uhol β a jeden uhol zatiaľ neznámy. Neznáme uhly sú ale práve tie, ktoré nás zaujímajú, lebo sú pri vrcholech A, B a C.

Teraz už stačí využiť tretiu vlastnosť, že súčet uhlov v trojuholníku je 180° . A to je rovnako veľa ako pre priamy uhol (a nie je to náhoda.) Môžeme preto ešte raz využiť $\alpha + 60^\circ + \beta = 180^\circ$, čo vieme od vrcholu Y. Teraz ale na tomto základe vieme, že keď chceme v $\triangle AYX$, $\triangle YBZ$ a $\triangle XZC$ doplniť k uhlu α a β tretí, môže to byť jedine 60° .

A presne to sme potrebovali. **Zdôvodnili sme teda** z vlastností v zadaní úlohy, že pri vrcholech A, B aj C je uhol 60° , a $\triangle ABC$ teda **musí byť rovnostranný**.



Úloha č. 3 (opravoval Ado Mrázik)

Našou úlohou je nájsť všetky možnosti na dopísanie jedného celého čísla na päť prázdnych kartičiek a zistiť, koľko najviac rôznych čísel na kartičkách môže byť napísaných, pričom už máme kartičku s číslom 9. Musí tiež platiť, že keď si náhodne vyberieme dve kartičky, ich súčet musí byť na niektorej zo všetkých šiestich kartičiek.

Skúsme začať pridaním náhodného čísla, napríklad 1. Teraz sa môže stať, že si vytiahneme kartičku s číslom 9 a tiež kartičku s číslom 1. Keďže $9 + 1 = 10$, musíme dopísať číslo 10 na nejakú z prázdnych kartičiek. Teraz sa nám ale môže stať, že si vytiahneme kartičky s číslami 10 a 1. $10 + 1 = 11$, pridávame číslo 11 na prázdnu kartičku. $11 + 1 = 12$, pridávame číslo 12. $12 + 1 = 13$, $13 + 1 = 14$, $14 + 1 = 15$ a tak ďalej.

Tento postup by sme mohli robiť donekonečna, no kartičiek máme len 6, takže číslo 1 nemôžeme napísať na kartičku. Môžeme si dokonca všimnúť, že každé číslo, ktorého výsledok po súčte s číslom 9 má výsledok väčší ako 9 bude fungovať úplne rovnako. To znamená, že nemôžeme mať viac ako jedno kladné číslo na kartičke, a keďže už máme napísané číslo 9, nemôžeme dopísať ďalšie kladné číslo na kartičku.

Vidíme, že znamienko pridávaného čísla je dôležité pri zistení, či takéto číslo môžeme pridať alebo nie. Zostali nám ešte záporné čísla a špeciálne číslo 0.

0 je špeciálna v tom, že súčet ľubovoľného čísla s číslom 0 nám nezmení dané číslo, napríklad $9 + 0 = 9$. Toto platí aj pre samotnú nulu, keďže $0 + 0 = 0$. Číslo 0 teda na kartičky napísať môžeme, a dokonca na ich najväčší počet, čím sa dostávame k **prvému výsledku: 9, 0, 0, 0, 0, 0**. Na dvojiciach kartičiek sú iba dva rôzne súčty 0 a 9, ktoré si z týchto čísel môžeme vytiahnuť, a každý má aspoň jeden sčítanec číslo 0.

Zostalo nám ešte preskúmať čísla záporné. Po súčte záporného čísla s číslom 9 bude výsledok číslo menšie ako 9. Ak by tento výsledok bol kladný, zopakovala by sa nám situácia, s ktorou sme sa už stretli. Ako príklad pridajme číslo -8. Keďže $9 - 8 = 1$, pridávame číslo 1. $9 + 1 = 10$, $10 + 1 = 11$ a tak ďalej.

V prípade záporného výsledku sa stane rovnaká situácia, iba opačným smerom. Pridáme číslo -11. $9 - 11 = -2$, pridávame číslo -2. $-11 - 2 = -13$, $-13 - 2 = -15$ a tak ďalej.

Zostáva jediná možnosť, a to že je výsledok rovný 0. Na to vyhovuje iba číslo -9. Zvyšok doplníme nulami, čo nás privádza k **druhému výsledku: 9, -9, 0, 0, 0, 0**. Pre kontrolu $9 - 9 = 0$, $9 + 0 = 9$, $0 - 9 = -9$, $0 + 0 = 0$, všetko sedí.

Rovnako ako druhé kladné číslo určite nemôžeme pridať druhé záporné číslo, čo znamená, že sme našli všetky možnosti.

Možnosti na kartičkách sú dve: 9, 0, 0, 0, 0, 0 a 9, -9, 0, 0, 0, 0.
Na kartičkách môžu byť napísané najviac 3 rôzne čísla.

Úloha č. 4 (opravovala Vierka Glevitzká)

Táto úloha sa dala riešiť veľa spôsobmi a ukážeme si viacero z nich. Máme tabuľku s rozmermi 4×4 a máme do nej doplniť čísla tak, aby najväčšie spoločné delitele v riadkoch a stĺpcoch boli všetky navzájom rôzne.

Tak ju teda skúsme nejako doplniť. Potom dopočítame najväčšie spoločné delitele v riadkoch a stĺpcoch. Ak sú všetky rôzne, tak sme vyhrali, no bez akejkoľvek stratégie je to na prvýkrát dosť ťažké trafiť. Teraz môžeme skúsiť vymeniť nejaké čísla v tabuľke tak, aby boli najväčšie spoločné delitele (ďalej už len NSD) v riadkoch a stĺpcoch rôzne. Veľa z vás týmto spôsobom našlo vyhovujúce tabuľky, no je to žiaľ postup, ktorý trvá najviac času.

Ako si to teda môžeme uľahčiť? Pri vymenení čísla v tabuľke vieme zmeniť NSD v riadku a stĺpci. Takže ak sa snažíme zmeniť NSD v riadku, tak nám to môže pokaziť NSD v danom stĺpci (zmení sa na nejaké NSD,

ktoré už máme). Preto si skúsime najprv určiť, kde chceme mať aké NSD a potom doplniť tabuľku tak, aby sme to dodržali.

Zľava si ku každému riadku napíšeme, aké v ňom chceme mať NSD. Zhora si ku každému stĺpcu napíšeme, aké v ňom chceme mať NSD. Do tabuľky budeme dopĺňať čísla tak, aby boli deliteľné zvolenými NSD pre ten riadok a ten stĺpec, v ktorých sa nachádzajú. Ako však zvoliť NSD?

Viacerí z vás si vybrali 8 rôznych prvočísel, napr. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Keď potom do tabuľky napíšeme súčin prvočísel pri riadku a stĺpci, v ktorom sa nachádza, tak bude určite deliteľné obomi z nich. Vďaka takémuto dopĺňaniu bude tiež každé číslo v tabuľke deliteľné iba 1-kou, samým sebou a týmito dvoma prvočíslami. Z toho tiež vyplýva, že najväčší spoločný deliteľ čísel v každom riadku aj stĺpci bude naozaj taký, ako sme si na začiatku určili. Druhú tabuľku vieme spraviť rovnako, iba si zvolíme iné prvočísla.

NSD	2	3	5	7
11	22	33	55	77
13	26	39	65	91
17	34	51	85	119
19	38	57	95	133

Ak sa nám nechce násobiť, tak si môžeme zvoliť ako NSD čo najmenšie čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8. Podobne ako minule, do tabuľky doplníme súčin čísel pri riadku a stĺpci, v ktorom sa nachádza. Takto zabezpečíme, že bude naozaj deliteľné oboma z nich. Jediná nevýhoda však je, že takto nevieme hneď povedať, čím všetkým bude toto číslo deliteľné (napr. 24 má oveľa viac deliteľov ako len 1, 3, 8 a 24). Mohlo sa nám teda stať, že NSD bude v nejakom stĺpci väčšie ako sme si pôvodne zvolili.

NSD	1	2	3	4
5	5	10	15	20
6	6	12	18	24
7	7	14	21	28
8	8	16	24	32

To sa mohlo stať napríklad vtedy, keď sme si zvolili ako NSD pre každý stĺpec (alebo každý riadok) párne číslo. Každé číslo v ľubovoľnom riadku sme kvôli tomu násobili párnym číslom, takže aj výsledný súčin bol vždy deliteľný 2-kou. Číslo 3 je síce deliteľom všetkých čísel v druhom riadku, ale tieto čísla sú deliteľné aj 2-kou, čiže aj 6-kou. Číslo 3 teda už nie je najväčší spoločný deliteľ čísel v tomto riadku a je ním číslo 6. Máme tam 2-krát 6-ku ako NSD.

NSD	2	4	6	8
2	2	4	6	8
3	6	12	18	24
5	10	20	30	40
7	14	28	42	56

Ak by sme si na začiatku vybrali namiesto 3-ky a 1-ky 9-ku a 11-ku, tak tabuľka ako taká by bola správne, keďže NSD v riadkoch a stĺpcoch by boli naozaj rôzne (2, 4, 6, 8, 18, 22, 10, 14). Vysvetlenie, prečo by vyhovovala zadaniu, by bolo ale nesprávne, keďže NSD by boli zle spočítané.

Na vypočítanie druhej tabuľky (keď už jednu máme) sa dala použiť aj táto pekná myšlienka. Ak je najväčší spoločný deliteľ čísel v riadku napr. 7 a všetky čísla v riadku vynásobíme ešte nejakým iným číslom napr. 10-kou, tak dostaneme riadok s číslami, ktorých najväčší spoločný deliteľ bude súčin týchto dvoch čísel, teda 70.

NSD	10	20	30	40
50	50	100	150	200
60	60	120	180	240
70	70	140	210	280
80	80	160	240	320

Pozrime sa detailnejšie na to, čo sa stane keď všetky čísla v tabuľke vynásobíme 10-kou (alebo iným číslom). Čísla v ľubovoľnom stĺpci alebo riadku mali pôvodne nejakého najväčšieho spoločného deliteľa. Väčšie číslo, ktoré by delilo každé z nich, teda neexistuje. Po vynásobení bude každé číslo deliteľné aj 10-kou. Preto keď ho spojíme (vynásobíme) s pôvodným najväčším spoločným deliteľom, tak tento súčin bude nové NSD, lebo väčšie číslo, ktoré delí všetky tieto čísla už neexistuje.