

JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG
S E Z A M K O, Školský rok 2025/2026, 1. zimná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravovali Iva a Kika Jančigové)

Jedna z možností, ako nájsť všetky dvojciferné čísla, ktoré sú deliteľné aj svojou prvou, aj svojou druhou cifrou, je vypísať si čísla od 10 do 99 a postupne ich všetky vyskúšať. To niektorí z vás aj spravili, ale pri vypisovaní bývajú dva problémy: 1. pokiaľ človek nemá dobrý systém, je ľahké sa pomýliť alebo na nejakú možnosť zabudnúť a 2. niekedy je možností na vypisovanie jednoducho priveľa. Preto má vždy zmysel rozmýšľať, či sa dá aspoň časť vypisovania ušetriť úvahou, napríklad takto:

Netreba zvažovať čísla končiace na 0, pretože nulou nedelíme. (Keby sme skúsili napríklad $20 : 0 = ?$, potom by malo platiť $? \cdot 0 = 20$, ale $? \cdot 0 = 0$.)

Pre čísla od 11 do 19 máme “zadarmo” splnenú podmienku deliteľnosti prvou cifrou, preto stačí skontrolovať, ktoré z nich sú deliteľné svojou druhou cifrou. Sú to **11, 12 a 15**.

Z čísel od 21 do 29 stačí uvažovať len párne (čiže deliteľné svojou prvou cifrou; sú to 22, 24, 26 a 28) a medzi nimi overiť deliteľnosť druhou cifrou. Dostávame **22 a 24**.

Z čísel od 31 do 39 stačí uvažovať len násobky troch (33, 36, 39) a pre tieto overiť deliteľnosť druhou cifrou. Vyhovujú **33 a 36**.

Z čísel od 41 do 49 uvažujeme len násobky čísla 4 a zistíme, že vyhovujú oba: **44 a 48**.

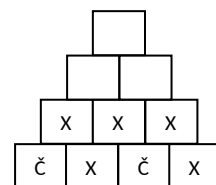
V každej ďalšej skupine sa už nájde len jeden násobok prvej cifry, ktorý je ale zároveň aj samotnou druhou cifrou a dostávame: 55, 66, 77, 88, 99.

Hľadané čísla sú teda: 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88, 99.

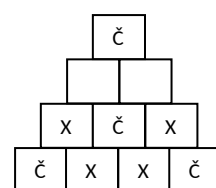
Úloha č. 2 (opravovala Erika Novotná)

Ahojte milí Sezamkáči! Veľa z vás si všimlo, že asi najťažšie bude do pyramídy rozmiestniť kvádre červenej farby. Prečo? Lebo tieto kvádre sú až štyri. Aj my preto začneme nimi – postupne a pozorne, lebo chceme nájsť naozaj všetky možnosti.

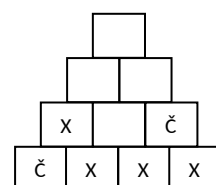
Ak by sme umiestnili červený kváder (Č) vľavo dole, tak susedné nesmú byť červené – označíme ich X. Ďalší červený kváder skúsime dať hneď vedľa X v spodnom riadku – to nám opäť vylúči susedné kvádre. Ostal nám horný trojuholníček, kde už zostávajúce dva červené kvádre nezmestíme. Toto rozmiestnenie je zlé a treba na ňom niečo zmeniť.



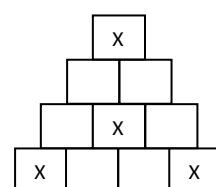
Zmeníme teda umiestnenie druhého červeného kvádra – dáme ho do pravého dolného rohu. Označíme tie, kde už červený kváder byť nemôže. Potom už vieme červené kvádre umiestniť len jedným spôsobom tak, aby sa nedotýkali. **Do takejto pyramídy by sme teraz mohli začať rozmiestňovať tehly ostatných farieb.**



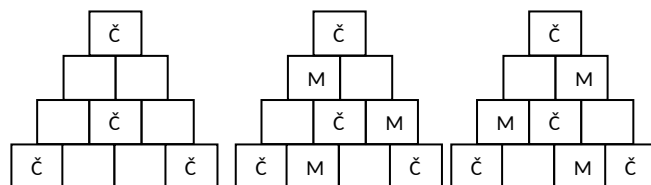
Skúsme ešte predtým ale zodpovedať otázku, či sa červené kvádre nedajú umiestniť ešte nejako inak. Čo keby sme druhý červený kváder vôbec nedávali do spodného riadku? Skúste prísť na to, čo by sa pokazilo, ak by sme druhý kváder dali podobne ako na obrázku vpravo. Ktoré možnosti by bolo ešte treba vyskúšať?



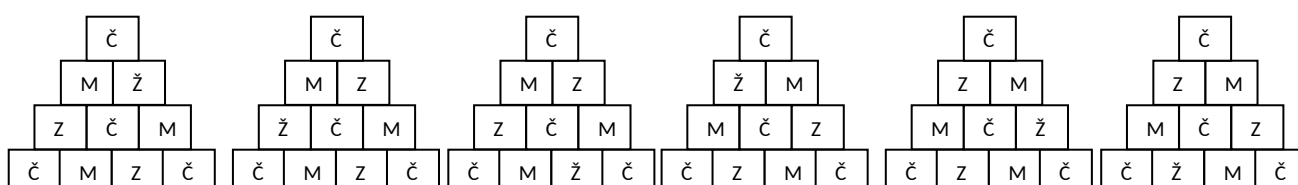
Keďže hľadáme všetky možnosti, musíme sa zamyslieť aj nad tým, či červený kváder musí byť v rohu. Ak by v ani jednom rohu nebol, musel by byť len niekde vo vnútornejšej časti pyramídy. Takisto by nemohol byť v strede, lebo toto políčko susedí so všetkými ostatnými. V tomto prípade nám zostáva len 6 miest a tam sa po umiestnení štyroch červených kvádrov vždy aspoň dva dotýkajú.



Vieme teda, že červené kvádre musia byť v strede a v rohoch pyramídy. Poďme teraz rozmiestňovať 3 modré kvádre (M). Tie musia byť v prázdnych kvádroch na striedačku.



Zostávajúce tri kvádre sa pri tomto rozmiestnení modrých a červených ani jeden nedotýkajú ostatných. Teda žltý (Ž) aj dve zelené (Z) kvádre tu už môžeme rozmiestniť hocikako – **dokopy šiestimi možnosťami ako vidno na obrázkoch nižšie.**



Úloha č. 3 (opravovali Janka a Tomáš Trúsikovci)

Vašou úlohou bolo pomôcť náčelníkovi Tenokovi pri rozdeľovaní kakaových bôbov. Sám náčelník vám posiela poďakovanie, lebo od väčšiny z vás dostal cenné rady. Ako vzorové riešenie ponúkame taký spôsob, ktorý sa aj u vás objavil najčastejšie.

Najprv ste zistili, koľko bôbov má dostať každý z náčelníkových priateľov. **Tenok má spolu** $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 10 + 10 + 10 = 85$ **bôbov**. Každému z piatich priateľov teda **rozdá** $85 : 5 = 17$ **bôbov**.

Následne bolo potrebné Tenokovi pomôcť rozdeliť vrecúška na kôpky tak, aby ich kamarátom mohol rovno odovzdať. Tým si aj overíme, že sa takto naozaj rozdeliť dajú.

Tenok má štyri vrecúška, ktoré majú po 10 bôbov. Ku každému z nich ste potrebovali pridať ešte 7 bôbov. To sa samozrejme nedá urobiť s vrecúškami, ktoré majú osem a viac bôbov. Jediný spôsob rozdelenia menších vrecúšok je taký, že k šiestim bôbom pridáme jeden, k piatim dva a k štyrom tri bôby. Tenokovi tak ostali ešte vrecúška s ôsmimi a deviatimi bôbmi, čo je spolu posledných sedemnášť bôbov pre posledného priateľa.

Jediné rozdelenie vrecúšok je teda nasledovné:

Prvý priateľ: 10 a 7

Druhý priateľ: 10, 6 a 1

Tretí priateľ: 10, 5 a 2

Štvrtý priateľ: 10, 4 a 3

Piaty priateľ: 9 a 8

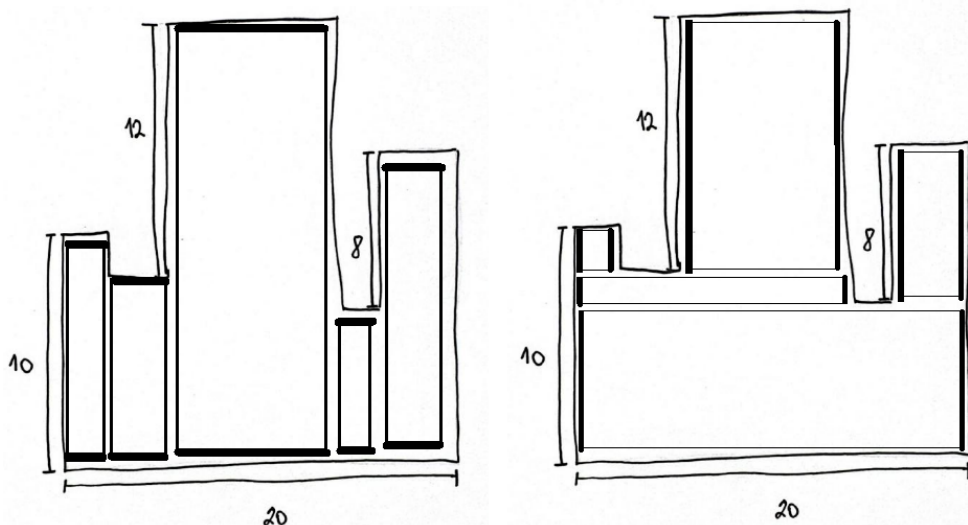
Úloha č. 4 (opravovala Kačka Bachratá)

V prvom rade treba povedať, že toto bola naozaj ťažká úloha, ktorej riešenie sa neučí na základných školách. Preto si všetci, čo úlohu nejako začali riešiť, zaslúžia obrovskú pochvalu za odvalu. A aj keď sa o nepodarilo vyriešiť každému riešiteľovi, sme hrdí na každého, čo to aspoň skúsil.

Pri riešení ste si skoro všetci uvedomili, že na náčrtku neboli žiadne jednotky dĺžky, a tak ste si nejaké doplnili. Väčšinou metre, ale kludne to mohli byť aj centimetre, alebo kilometre. Z pohľadu matematikov je to jedno, ale v realite si to treba zistiť, aby sa náhodou nemeralo v metroch a nenakupovalo v kilometroch.

Druhá vec, ktorá bola v náčrtku nepresná, boli uhly, ktoré mali byť pravé, ale na obrázku neboli. Mnohí z vás preto správne usúdili, že ani rozmery obrázka nie sú úplne presné. Strana dĺžky 10 napríklad nie je úplne polovica zo strany dĺžky 20 (aj keď matematicky by mala byť). Preto riešenie nebudeme robiť meraním na obrázku, ale nejakou úvahou.

Pri opravovaní sme našli veľa rôznych úvah, a naozaj sme sa od vás veľa naučili. Najviac názorné nám pripadalo riešenie, v ktorom riešiteľ Félix doplnil do obrázku obdĺžniky. Na obrázku nie sú úplne presné, ale na presnom poli by obdĺžniky viedli presne po hraniciach pozemku. Na prvom obrázku je súčet strán, ktoré sú na juhu obdĺžnikov podľa zadania 20, preto aj súčet strán na severe, bude dvadsať. (Protíľahlé strany v obdĺžnikoch sú vždy rovnaké.) Na druhom obrázku sú nakreslené obdĺžniky, ktoré použijeme na prenos dĺžok zo severu na juh, teda strany na východe a západe. Strany na západe obdĺžnikov majú spolu dĺžku 30, teda aj strany na východe, budú mať spolu dĺžku 30. Keď spočítame dĺžky na severe, juhu, východe a západe, dostaneme celkovú dĺžku plotu, teda $20 + 20 + 30 + 30 = 100$.



Iné, veľmi názorné riešenie bolo, že keď chceme obísť celý pozemok, tak koľko sa ide na východ, toľko sa musí ísť na západ a koľko sa ide na sever, toľko sa musí ísť na juh. Ale na sever sa ide dokopy 30 a na západ dokopy 20. To je spolu tiež 100.