



JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXIX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG
S E Z A M, Školský rok 2025/2026, 2. zimná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravovali Betka Bohiníková a Timka Jakubócyová)

Tento príklad bolo možné riešiť viacerými spôsobmi. Asi najčastejšie ste si vypísali násobky 13, a pozerali sa, či je možné k nim nájsť čísla s príslušným ciferným súčtom. V takomto prípade bolo potrebné vypísať všetky možnosti a ukázať, ktoré fungujú, ktoré nie, a prečo ste v nejakom momente prestali skúšať ďalej. Objavilo sa však veľa pekných nápadov, ako si znížiť počet možností, a tak si na ne trochu posvietime.

Dá sa ukázať, že riešenia budú len trojciferné čísla. Ľahko overíme, že žiadne jednociferné nie je rovné 13-násobku svojho ciferného súčtu. Pri dvojciferných číslach platí, že ak si zapíšeme číslo ako ab , tak potom hľadáme $10 \cdot a + b = 13 \cdot (a + b)$. To je ekvivalentné $0 = 3 \cdot a + 12 \cdot b$, čo by platilo iba ak by čísla a aj b boli 0. Čiže úloha nemá žiadne dvojciferné riešenie.

Štvor- a viac-ciferné nefungujú, pretože 13-násobok ciferného súčtu rastie pomalšie ako samotné čísla. Vezmime si najväčšie možné 4-ciferné číslo 9999, to dosahuje najvyšší možný ciferný súčet rovný 36. Súčin $36 \cdot 13 = 468$ je ďaleko menší ako 1000. Z toho vyplýva, že každé iné 4-ciferné číslo bude mať teda ciferný súčet menší a jeho 13-násobok bude vždy menší ako 1000. Teda nenájdeť žiadne riešenie medzi 4-cifernými. S každou ďalšou pridanou cifrou sa bude tento rozdiel zväčšovať – skúste si rozmyslieť prečo.

Zostáva preskúmať trojciferné čísla. Najmenší násobok 13, ktorý je trojciferný je 104. Najväčší ciferný súčet trojciferného čísla je 27, ktorého trojnásobok je 351. Naše riešenia sa teda musia nachádzať niekde medzi. Jednou z možností je vyskúšať všetky násobky 13 medzi 104 a 351 a overiť, ktoré z nich vyhovujú. Druhá možnosť je zúžiť výber trojciferných čísel abc riešením rovnice $100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 13 \cdot a + 13 \cdot b + 13 \cdot c$. Keď túto rovnosť upravíme, vieme dostať na ľavej strane číslo mínus jeho ciferný súčet a na pravej máme 12-násobok ciferného súčtu.

$$100 \cdot a + 10 \cdot b + c - (a + b + c) = 13 \cdot a + 13 \cdot b + 13 \cdot c - (a + b + c)$$

$$9 \cdot (11 \cdot a + b) = 12 \cdot (a + b + c)$$

$$3 \cdot (11 \cdot a + b) = 4 \cdot (a + b + c)$$

Z tejto finálnej úpravy vieme povedať, že 3-ciferné číslo, ktoré vyhovuje zadaniu, musí byť násobkom trojky (lebo jeho ciferný súčet musí byť násobkom trojky). Taktiež z danej rovnosti vyplýva že $29 \cdot a = b + 4 \cdot c$, a teda $a < 2$, pretože $b + 4 \cdot c$ môže byť najviac 45 (ak by b aj c obe boli rovné 9), a to je menej ako $29 \cdot 2$.

Čiže sme zúžili riešenia na 3-ciferné čísla, ktoré sú násobkami 13tky a 3jky a začínajú cifrou 1. To sú len čísla 117, 156 a 195. Skúškou overíme, že pre tieto tri naozaj platí, že sú 13-násobkom svojho ciferného súčtu. Zároveň sme vylúčili, že by mohli existovať ľubovoľné iné čísla, ktoré by mali túto vlastnosť.

Hľadané čísla sú 117, 156 a 195.

Úloha č. 2 (opravovali Maťka Gaňová a Miška Rosinská)

Ako prvé si označíme body a strany ako na obrázku nižšie. Hľadaný obsah trojuholníka BCG si označíme x .

Obsah obdĺžnika vieme vypočítať ako súčin jeho strán. Preto z obdĺžnika ABGF vieme, že $a \cdot b = 15$. Obsah pravouhlého trojuholníka vieme vypočítať ako polovicu súčinu jeho odvesien, takže z trojuholníka GEF platí $b \cdot c \div 2 = 8$. Túto rovnosť si vieme zapísať ako $b \cdot c = 16$. Môžeme si všimnúť, že oba súčiny majú spoločný činiteľ b , a preto keď dáme jednotlivé súčiny do pomeru, dostávame

$$(a \cdot b) \div (b \cdot c) = a \div c = 15 \div 16.$$

Z obdĺžnika GCDE vieme, že $c \cdot d = 12$. Z trojuholníka BCG platí $a \cdot d \div 2 = x$, čo si vieme prepísať ako $a \cdot d = 2 \cdot x$. Oba súčiny opäť majú spoločného činiteľa d , teda keď ich dáme do pomeru podobne ako v predchádzajúcom odseku, tak musí platiť, že $a \div c = 2 \cdot x \div 12$.

Teraz si už vieme dopočítať hodnotu x tak, že porovnáme vyjadrenia pomeru $a \div c$ z jednotlivých odsekov:

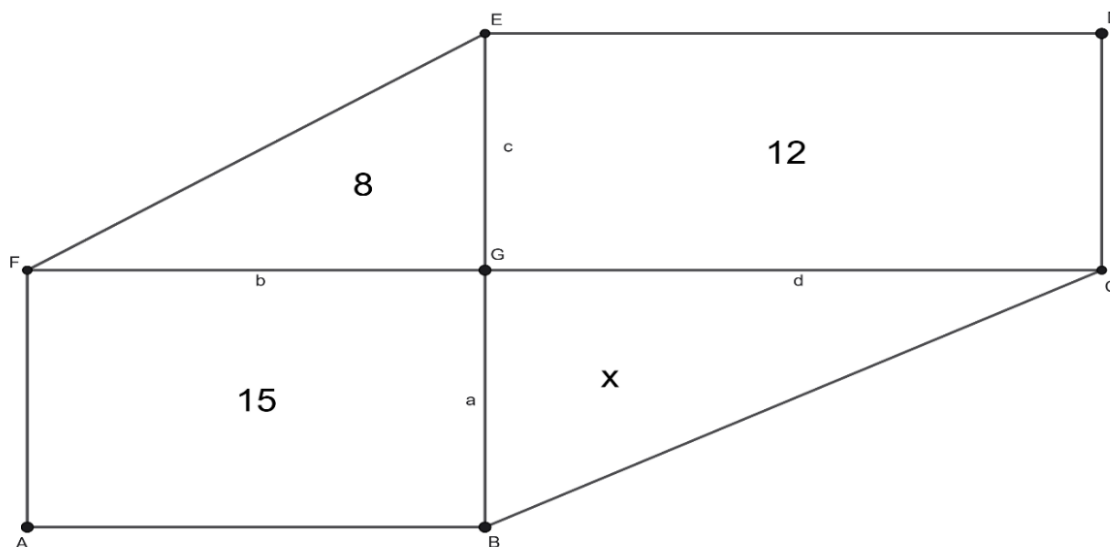
$$a \div c = 15 \div 16 = 2 \cdot x \div 12$$

$$15 \cdot 12 = 2 \cdot 16 \cdot x$$

$$180 = 32 \cdot x$$

$$180 \div 32 = 5,625 = x$$

Obsah zasypanej časti bol teda $5,625\text{m}^2$.



Úloha č. 3 (opravoval Mojo Majdiš)

Najprv si označme jednotlivé piesne – prvá siréna má piesne A1 a A2, druhá B1 a B2 a tretia C1 a C2.

Prvá môže zaznieť ktorákoľvek pieseň, čiže máme 6 možností. (Napríklad A1.)

Druhá pieseň musí byť od inej sirény ako tej, čo spievala prvú pieseň. To nám dáva 4 možnosti na druhú pieseň. (V našom názornom príklade napríklad B1.)

Pri tretej piesni to začína byť trochu komplikované. Máme dve možnosti - buď zaspieva tá siréna, ktorá spievala prvú pieseň, alebo tá, ktorá ešte nespievala vôbec.

Pozrime sa na prvú možnosť. (V našom príklade pieseň A2.) Ostávajú nám potom tri piesne. Dve od sirény, ktorá zatiaľ nespievala a ktoré nemôžu byť pri sebe (V našom príklade C1 a C2). Tretia pieseň je od sirény, ktorá spievala druhú pieseň (u nás B2). Máme 2 možnosti ako tieto piesne zoradiť. (V našom príklade C1 B2 C2 a C2 B2 C1.) To nám dokopy dáva $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ možností.

Teraz sa pozrime na druhú možnosť - tretia pieseň bude od sirény, ktorá zatiaľ nespievala. Má 2 piesne, čo nám dáva 2 možnosti. (V našom príklade C1 alebo C2). Ďalšia pieseň bude buď od sirény ktorá spievala prvú pieseň, alebo od tej, čo spievala druhú pieseň. (U nás A2 alebo B2.)

To sú opäť 2 možnosti na štvrtú pieseň. Ostávajú nám už len dve piesne, ktoré môžu odspievať ako piatu a šiestu a to v ľubovoľnom poradí – opäť 2 možnosti. Dokopy teda máme $6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192$ možností.

Dokopy teda mohli sirény spievať $48 + 192 = 240$ dní.

Úloha č. 4 (opravovali Janči Jakubík a Danči Ondovčík)

Aby sa nám vzorové riešenie lepšie čítalo, hneď na začiatku „prezradíme“ správnu odpoveď. Vyhrávajúcu stratégiu má Janete. Znamená to, že môže hrať takým spôsobom (môžeme tiež povedať systémom), ktorý jej zaručí výhru v každom prípade, bez ohľadu na to, ako hrá Kit. Musí ale správne reagovať na jeho ťahy a v našej úlohe tiež správne začať. Než si jej stratégiu popíšeme presne, vysvetlíme si niekoľko všeobecných vlastností ich hry.

Najprv začneme tým, že si vysvetlíme, čo znamená slovo “aspoň”. Znamená to, že niečoho je minimálne daný počet alebo viac. Napríklad ak mám aspoň 6 jablák, znamená to, že mám minimálne 6 jablák, ale môžem mať aj viac.

A teraz sa pozrieme na 10-tu vetu: “Aspoň 10 viet je nepravdivých”. Ak by táto veta bola pravdivá, tak by na pergamene muselo byť aspoň 10 nepravdivých viet. Všetkých viet je dokopy 10, teda by zostalo iba 9 viet k dispozícii takých, ktoré by mohli byť nepravdivé. Preto 10-ta veta nemôže byť pravdivá. Kvôli tomu musí byť 1. veta pravdivá, lebo tvrdí, že aspoň 1 veta je nepravdivá, čo už bude vždy pravda.

Keby bola 9-ta veta pravdivá znamenalo by to, že by muselo byť na pergamene napísaných aspoň 9 nepravdivých viet. Predpokladáme, že 9-ta veta je pravdivá. Spolu s 1-vou vetou, ktorá je pravdivá tiež, by to boli dokopy 2 pravdivé vety, lenže potom by ostalo iba $10 - 2 = 8$ nepravdivých viet a to by priamo odporovalo tomu čo hovorí 9-ta veta. Preto 9-ta veta nemôže byť pravdivá a musí byť nepravdivá. Zistili sme, že na pergamene musia byť aspoň 2 nepravdivé vety, 10-ta a 9-ta veta. Preto 2-há veta musí byť pravdivá, lebo tvrdí, že aspoň 2 vety sú nepravdivé, čo už bude vždy pravda.

Keby bola 8-ma veta pravdivá znamenalo by to, že by muselo byť na pergamene napísaných aspoň 8 nepravdivých viet. Ak by bola 8-ma veta pravdivá, tak spolu s 1-vou vetou a 2-hou vetou, ktoré sú pravdivé tiež, by to boli dokopy 3 pravdivé vety, lenže potom by ostalo iba $10 - 3 = 7$ nepravdivých viet a to by priamo odporovalo tomu čo hovorí 8-ma veta. Preto 8-ma veta nemôže byť pravdivá a musí byť nepravdivá. A keďže vieme, že na pergamene 10-ta, 9-ta a 8-ma veta sú nepravdivé, tak kvôli tomu musí byť 3-tia veta pravdivá, lebo tvrdí že aspoň 3 vety sú nepravdivé, čo bude vždy pravda.

Keby bola 7-ma veta pravdivá znamenalo by to, že by muselo byť na pergamene napísaných aspoň 7 nepravdivých viet. Keby je 7-ma veta pravdivá, tak spolu s 1-vou vetou, 2-hou vetou a 3-ťou vetou, ktoré sú pravdivé tiež, by to boli dokopy 4 pravdivé vety, lenže potom by ostalo iba $10 - 4 = 6$ nepravdivých viet a to by priamo odporovalo tomu čo hovorí 7-ma veta. Preto 7-ma veta nemôže byť pravdivá a musí byť nepravdivá. A preto že na pergamene už sú 10-ta, 9-ta, 8-ma a 7-ma veta nepravdivé, tak musí byť 4-tá veta pravdivá, lebo tvrdí, že aspoň 4 vety sú nepravdivé, čo bude vždy pravda.

Keby bola 6-ta veta pravdivá znamenalo by to, že by muselo byť na pergamene napísaných aspoň 6 nepravdivých viet. Kebyže 6-ta veta je pravdivá, tak spolu s 1-vou vetou a 2-hou vetou, 3-tou vetou a 4. vetou, ktoré sú pravdivé tiež, by to boli dokopy 5 pravdivých viet, lenže potom by ostalo iba $10 - 5 = 5$ nepravdivých viet a to by priamo odporovalo tomu čo hovorí 6-ta veta. Preto 6-ta veta nemôže byť pravdivá a musí byť nepravdivá.

A keďže už sú na pergamene 10-ta, 9-ta, 8-ma, 7-ma a 6-ta veta nepravdivé, tak musí byť 5-ta veta pravdivá, lebo tvrdí, že aspoň 5 viet je nepravdivých, čo bude vždy pravda.

Takže na pergamene je 5 pravdivých viet a sú to vety 1, 2, 3, 4 a 5.