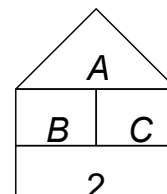




JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG
SEZAMKO, Školský rok 2025/2026, 2. zimná séria
Vzorové riešenia

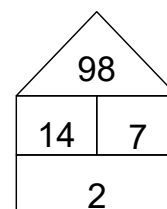
Úloha č. 1 (opravoval Peter Novotný)

Keď vydělíme dvojnásobok nejakého (nenulového) čísla týmto číslom, vždy dostaneme číslo 2. Napríklad $(2 \cdot 123) \div 123 = 2$. Takže číslo hosta v izbe D je vždy 2, bez ohľadu na to, aké čísla sú v ostatných izbách.



Uvažujme, v ktorej zo zvyšných izieb A, B, C môže byť hosť s číslom 7.

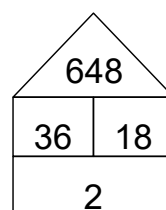
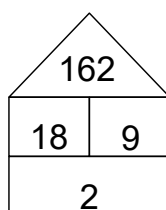
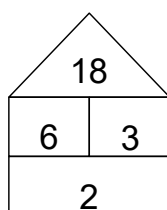
- Ak by bol v izbe A, bolo by číslo 7 súčinom čísel z izieb B a C. Avšak 7 sa dá na súčin dvoch prirodzených čísel rozložiť iba ako $7 = 7 \cdot 1$, a takto by nebola splnená podmienka, že číslo v izbe B je dvojnásobkom čísla v izbe C. Takže v izbe A nemôže byť 7.
- Nemôže byť ani v izbe B, pretože číslo 7 nie je dvojnásobkom žiadneho prirodzeného čísla.
- V izbe C byť môže. Potom v B bude nutne $2 \cdot 7 = 14$ a v A bude nutne $14 \cdot 7 = 98$. Dostávame tak prvé a jediné riešenie, keď je v niektorej izbe číslo 7 (zjavne vyhovuje všetkým podmienkam zadania).



Podobne rozoberieme možnosti, v ktorej z izieb A, B, C môže byť hosť s číslom 18.

- Nech je 18 v izbe A. Potom v izbách B a C musia byť také prirodzené čísla, ktorých súčinom je číslo 18 a zároveň je jedno dvojnásobkom druhého. Zo všetkých možných rozkladov na súčin
$$18 = 18 \cdot 1 = 9 \cdot 2 = 6 \cdot 3$$
tomu vyhovuje len dvojica čísel 6 a 3.
- Nech je 18 v izbe B. Potom v C musí byť jeho polovica, teda 9. Následne v A musí byť súčin $18 \cdot 9 = 162$.
- Nech je 18 v izbe C. Potom v B musí byť jeho dvojnásobok, teda 36. Následne v A musí byť súčin $36 \cdot 18 = 648$.

Všetky tri uvedené možnosti vyhovujú podmienkam zadania a z postupu vyplýva, že žiadne iné neexistujú.



Úloha č. 2 (opravoval Hynek Bachratý)

Veľmi sme sa potešili, že takmer všetci z vás našli správne riešenie úlohy a teda odpoveď, ktorý zo štyroch radcov Maty, Luka, Elina a Izel si objednal aký nápoj a aké jedlo. Veľká väčšina z vás navyše svoju odpoveď úplne presne zdôvodnila – a preto len za úplné vysvetlenie bolo päť bodov.

Ako teda malo vyzeráť správne riešenie?

Viacerí z vás úlohu riešili pomocou tabuliek, do ktorých postupne vyplňali informácie známe zo zadania – označovali si potvrdené priradenia a vyškrtávali tie, ktoré boli zadaním alebo priradením vylúčené. Tento postup je úplne správny a veľmi praktický, ale trochu dlhý do tohto vzorového riešenia. Všetkých ale za takýto postup chválime.

Druhá možnosť bola postupne využívať známe tvrdenia o objednávkach. Keď ste postupovali v správnom poradí, úloha sa vyriešila skoro sama od seba a dosť rýchlo. Poďme si to teda skúsiť, a pripomeňme si zadanie:

- (1) Maty si neobjednal kaktusový džús.
- (2) Elina si objednala tekvicový džús.
- (3) Ku kukuričnej kaši sa objednal ananásový džús.
- (4) Luka nepije džús a teší sa na svoj fazuľový guláš.
- (5) Tekvicový džús a rajčinový šalát si neobjednal ten istý radca.
- (6) V kuchyni pre týchto hostí určite pripravovali aj avokádovú placku a horúcu čokoládu.

Okrem horúcej čokolády sú zvyšné nápoje džúsy, preto z (4) rovno vieme že Luka má fazuľový guláš a k nemu môže mať len horúcu čokoládu. Z (2) určite vieme, že Elina má tekvicový džús. Zostali tak už len dva džúsy, a keďže z (1) Maty kaktusový nechce, zostal mu len ananásový džús. Pretože Maty má ananásový džús, podľa (3) k nemu má aj kukuričnú kašu. Na jedlo už zostala len placka a rajčiny, a rajčiny podľa (5) nepatria k Eline s tekvicovým džúsom. Elina musí mať preto už len avokádovú placku. Izel sme ešte ani raz nespomenuli, ale zostal pre ňu už len jediný nápoj a jedlo. Izel si preto určite objednala kaktusový džús a rajčinový šalát. Z postupu zároveň vidíme, že žiadna iná možnosť objednávok neprichádza do úvahy. Pre prehľadnosť výsledok ešte raz zapíšeme:

Maty si objednal ananásový džús a kukuričnú kašu,

Luka má horúcu čokoládu a fazuľový guláš,

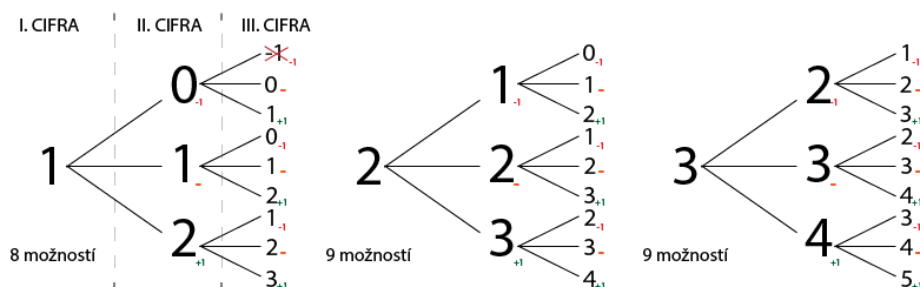
Elina dostala tekvicový džús a avokádovú placku,

Izel priniesli kaktusový džús a rajčinový šalát.

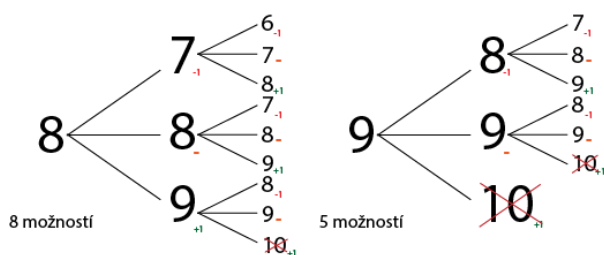
Malá otázka na záver: ktorá z objednávok by chutila vám?

Úloha č. 3 (opravoval Matej Grochal)

Na to, aby bolo číslo obradné, musí byť trojciferné. To automaticky vyraduje cifru 0 na mieste stoviek. Susedné cifry sa môžu líšiť nanajvýš o 1. To znamená, že tá vpravo môže byť o jedna väčšia, rovnaká alebo o jedna menšia ako tá vľavo. Najlepšie je zakresliť si možné kombinácie:



Rýchlo sa dá odhaliť, že pre cifry 2 a 3 na mieste stoviek existuje rovnaký počet možností. Toto bude platiť až po cifru 7 (na mieste stoviek), lebo cifry vpravo od nej neprekročia cifru 9. Pri 8 a 9 dôjde k presiahnutiu cifry 9, čo nám vylučuje niektoré kombinácie:



Preto je finálny počet obradných čísel rovný $8 + 6 \cdot 9 + 8 + 5 = 75$.

Úloha č. 4 (opravovala Hanka Potočná a Kristína Ďuračíková)

Táto úloha sa dala riešiť rôzne. Záležalo hlavne na tom, čo ste začali rysovať ako prvé. Najčastejšie ste začínali trojuholníkom, alebo vonkajšou kružnicou, a mnohí z vás aj vnútornou kružnicou. Na obrázku dole môžeme sledovať jeden z mnohých postupov, ako sa dal talisman narysovať.

Začnime vonkajšou kružnicou, nazvime ju k_1 so stredom S . Zostrojíme si úsečku AD , ktorá je vodorovná a prechádza bodom S . Pomocou kružidla z bodu A narysujeme body B, F , ktoré sú na kružnici k_1 a ich vzdialenosť od bodu A je rovná polomeru kružnice k_1 . Z bodu D podobným spôsobom narysujeme body C, E . Keď teraz spojíme tieto body, vznikne nám šesťuholník.

Narysujeme stred úsečky EF , nazvime ho G . Z bodu G spustíme kolmicu do stredu S . Táto úsečka je tiež kolmá na úsečku AD . Následne si vezmeme túto vzdialenosť a narysujeme kružnicu k_2 . Táto kružnica sa dotýka všetkých strán šesťuholníka.

Teraz na kružnici k_2 potrebujeme nájsť vrcholy štvorca. Najlepšie ich získame tak, že si urobíme uhlopriečky štvorca p, q . Buď uhlomerom odmeriame uhol 45° pri vrchole S . Alebo tí z nás, ktorí sa to už učili v škole, môžu narysovať os uhla GSD , ktorá bude zároveň uhlopriečkou p . V strede S na priamku p spustíme kolmicu q , ktorá je zároveň druhou uhlopriečkou štvorca. Body, kde priamky p, q pretnú kružnicu k_2 sú vrcholy štvorca $KLMN$.

Bod, kde úsečka SG pretína stranu MN , nazvime Z . Narysujeme kružnicu k_3 , so stredom S a polomerom SZ .

Teraz narysujeme trojuholník. Buď si odmeriame uhlomerom 30° pri vrchole Z . Alebo vezmeme do kružidla polomer k_3 . Z bodu Z na k_3 postupne nanesieme 6 bodov vo vzdialenosti $|SZ|$ (polomer k_3). Každý druhý z týchto bodov potom použijeme na narysovanie trojuholníka XYZ .

Zo stredu strany XY nanesieme kolmicu do stredu S . Táto vzdialenosť je polomer kružnice k_4 , ktorá je vpísaná trojuholníku XYZ .

Talizman máme hotový.

