



JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXIX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG
S E Z A M, Školský rok 2025/2026, 1. letná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravovala Miška Rosinská)

Prvú vec, čo si môžeme všimnúť je, že v príklade je 10 rôznych písmen. Tým, že máme 10 rôznych číslíc (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), za každým písmenom bude iná číslica, a každú použijeme práve raz.

		S	I	N	U	S
		S	I	N	U	S
K	O	S	I	N	U	S
T	A	N	G	E	N	S

Začneme od konca príkladu, kde $S + S + S = _S$. Môžeme si vypísať tento súčet pre všetky číslice a označiť si možnosti, v ktorých cifra jednotiek sa zhodne.

$0 + 0 + 0 = 0$	$2 + 2 + 2 = 6$	$4 + 4 + 4 = 12$	$6 + 6 + 6 = 18$	$8 + 8 + 8 = 24$
$1 + 1 + 1 = 3$	$3 + 3 + 3 = 9$	$5 + 5 + 5 = 15$	$7 + 7 + 7 = 21$	$9 + 9 + 9 = 27$

Vychádza nám teda, že S môže byť len 0 alebo 5. SINUS ale začína na S a prirodzené číslo nemôžu začínať nulou, takže máme **S = 5**.

V prvých dvoch stĺpcoch máme štyri rôzne písmená (K, O, T a A), a tak aj štyri rôzne číslice. Aby sa K nerovnilo T, musí sa ku K pripočítať nejaký zostatok z predchádzajúceho stĺpca, a to isté pre dvojicu O a A v druhom stĺpci.

Než sa pozrieme na tieto stĺpce, zistíme najskôr aký vie byť zostatok z ľubovoľného stĺpca. Z posledného už vieme, že máme zostatok 1. Ak by U v predposlednom stĺpci malo najväčšiu možnú hodnotu, teda 9, súčet by bol $9 + 9 + 9 = 27$ plus 1 za zostatok z posledného stĺpca, teda dokopy 28. Teda zostatok za predposledný stĺpec je najviac 2. Podobne v treťom od konca vieme mať najviac $9 + 9 + 9$ plus zostatok z predposledného, teda najviac 28. Rovnako aj pre štvrtý a piaty od konca. **Číže zostatok z predchádzajúceho stĺpca (nech je to ktorýkoľvek) nepresiahne 2.**

Pozrime sa teraz na O a A v druhom stĺpci a čo sa k nemu môže prirábať z tretieho. Keďže $S = 5$, v treťom stĺpci tak máme $5 + 5 + 5 = 15$ plus prípadný zostatok zo štvrtého stĺpca. Ten je ale najviac 2, a tretí stĺpec prispeje do druhého presne jednou. Aby sa K nerovnilo T, tak O spolu so zostatkom z tretieho stĺpca (čo je 1) musí byť aspoň 10. Jediný prípad, kedy to nastane je keď **O = 9**. Preto **A = 0**, a písmená K a T reprezentujú dve po sebe idúce číslice.

Ďalej si môžeme všimnúť, že v treťom stĺpci máme $S + S + S = _N$. Tým, že S a N musia byť rôzne číslice a už vieme že $S = 5$, tak z predošlého stĺpca musí ostať nejaký zostatok. O tom navyše vieme, že môže byť najviac 2. Máme teda buď $5 + 5 + 5 + 1 = 16$ a $N = 6$, alebo $5 + 5 + 5 + 2 = 17$ a $N = 7$.

V predposlednom stĺpci máme $U + U + U + 1 = _N$, pričom +1 je zostatok z posledného stĺpca (kde $5 + 5 + 5 = 15$). Ak $N = 6$, tak $U + U + U + 1 = _6$, a teda $U + U + U = _5$. To sedí len pre $U = 5$ (stačí sa pozrieť hore, kde máme vypísané všetky možnosti), no táto číslica je už použitá ako S. Takže $U + U + U + 1 = _7$, a teda $U + U + U = _6$, čo sedí iba pre **U = 2** (opäť stačí pozrieť hore), a máme teda **N = 7**. Zo štvrtého stĺpca sa nám preto musí preniesť zostatok 2 do tretieho.

Potom v piatom stĺpci máme $N + N + N = _E$, a navyše už vieme, že nič z predchádzajúceho stĺpca sa neprenáša. Keďže $N = 7$, tak máme $7 + 7 + 7 = 21$. Preto **E = 1** a zostatok 2 sa preniesie k štvrtému stĺpcu.

Ešte štyri číslice sme nepoužili, a to 3, 4, 6 a 8, a zvyšné písmena sú K, T, I a G. Ako sme skôr zdôvodnili, K a T sú po sebe idúce číslice, takže **K = 3** a **T = 4**. Chýba nám teda len štvrtý stĺpec kde $I + I + I + 2 = 2G$, pričom + 2 je kvôli zostatku z piateho stĺpca a 2G potrebujeme, aby sa zostatok 2 preniesol do tretieho stĺpca. Môžeme vyskúšať $I = 6$, $G = 8$ a opačne, a pozrieť ktorá možnosť sedí. Pre $I = 6$ máme $6 + 6 + 6 + 2 = 20$, takže G by bolo 0 a nie 8, a to nesedí. Pre $I = 8$ máme $8 + 8 + 8 + 2 = 26$, čo sedí, lebo $G = 6$. Takže **I = 8** a **G = 6**.

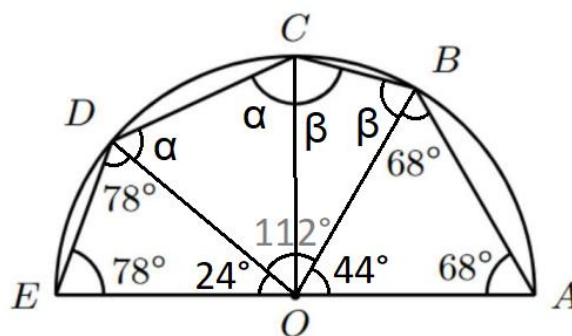
Vstupný kód do paláca je teda 4076175.

Úloha č. 2 (opravovala Vierka Glevitzká)

Bod O je stredom kružnice, na ktorej sa nachádzajú body A, B, C, D a E. Preto úsečky OA, OB, OC, OD a OE predstavujú polomer tejto kružnice, a sú teda všetky rovnako dlhé. Dokreslíme si preto tieto úsečky do obrázka.

Trojuholníky EDO a ABO sú preto rovnoramenné, a tak uhly EDO a DEO budú mať rovnakú veľkosť a podobne aj uhly ABO a BAO budú mať rovnakú veľkosť. Uhol EDO má teda 78° a uhol ABO má 68° .

Vieme teraz dopočítať tretí uhol v týchto trojuholníkoch. Súčet uhlov v trojuholníku je 180° , a preto bude mať uhol EOD veľkosť $180^\circ - 2 \cdot 78^\circ = 24^\circ$ a podobne uhol AOB veľkosť $180^\circ - 2 \cdot 68^\circ = 44^\circ$.



Uhol EOA je priamy, takže vieme dopočítať veľkosť uhla DOB, ktorý bude mať $180^\circ - 44^\circ - 24^\circ = 112^\circ$. Pozrieme sa teraz bližšie na štvoruholník OBCD.

Ako sme na začiatku spomínali, úsečky BO, CO a DO majú rovnakú dĺžku, lebo sú to polomery kružnice. Trojuholníky DOC a COB sú teda rovnoramenné. Uhly ODC a OCD majú preto rovnakú veľkosť, ktorú nazveme α . Podobne uhly OCB a OBC majú rovnakú veľkosť, ktorú nazveme β . Každý štvoruholník má súčet vnútorných uhlov 360° ($2 \cdot 180^\circ$), keďže ho vieme uhlopriečkou rozdeliť na dva trojuholníky so súčtom uhlov 180° . Preto v našej situácii platí, že $\alpha + \alpha + \beta + \beta + 112^\circ = 360^\circ$. Keď od oboch strán odčítame 112° , tak dostaneme, že $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = 248^\circ$. Veľkosť uhla DCB, ktorú sa snažíme zistiť, je $\alpha + \beta$. Z poslednej rovnice teda po predelení dvomi dostaneme, že $|\sphericalangle DCB| = \alpha + \beta = 124^\circ$.

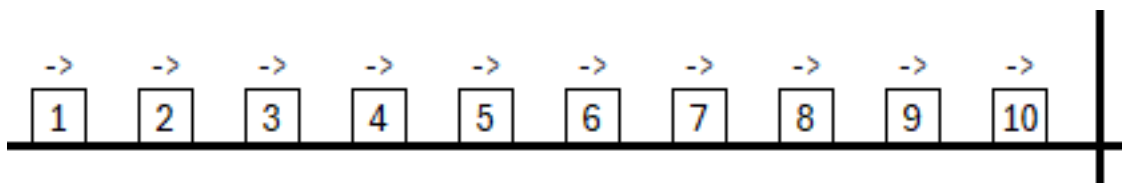
Veľkosť uhla DCB je 124° .

Veľmi pekný postup, na ktorý viacerí z vás prišli, nám vie trochu uľahčiť prácu. Preto ho tu ešte tiež pre zaujímavosť zahrniem, keďže vďaka nemu nemusíme vôbec počítať uhly pri bode O.

Ako sme už spomínali, trojuholníky EOD, DOC, COB a BOA sú rovnoramenné. Platí teda všetko o uhloch pri bodoch A, B, C, D a E, čo sme doteraz spomínali. Súčet uhlov v ľubovoľnom päťuholníku je 540° ($3 \cdot 180^\circ$), lebo ho vieme rozdeliť na tri trojuholníky (so všetkými vrcholmi vo vrcholoch päťuholníka). Súčet uhlov v päťuholníku ABCDE je teda $2 \cdot 78^\circ + 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta + 2 \cdot 68^\circ = 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta + 292^\circ = 540^\circ$. Odpočítame od oboch strán 292° a dostaneme $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = 248^\circ$. Podobne ako minule získame, že $|\sphericalangle DCB| = \alpha + \beta = 124^\circ$.

Úloha č. 3 (opravovali Danči Ondovčík a Mojo Majdiš)

Na začiatku si očísľujeme zľava doprava od 1 do 10. Zároveň všetci roboti začínajú otočený smerom doprava.



A rozoberme si to po robotoch.

Robot 1 bude putovať doprava, až kým nenarazí do robota 2 idúceho doľava, otočí sa a odíde preč z dráhy. Takže dokopy spravil robot 1 jednu otočku.

Medzičasom robot 2 putuje doprava, až kým nenarazí do robota 3 a otočí sa. Avšak ešte nevyjde z dráhy, lebo z predchádzajúceho odseku vieme že musí práve raz naraziť do robota 1. Teda narazí do robota 1, otočí sa, znovu narazí do robota 3 a potom odíde preč z dráhy, keďže už robot 1 odišiel z dráhy. Takže dokopy spravil robot 2 tri otočky.

Medzičasom robot 3 putuje, kým nenarazí do robota 4 a otočí sa. Vyššie sme zistili, že robot 3 a robot 2 do seba narazia presne dvakrát, než robot 2 odíde z dráhy. Preto robot 3 narazí do robota 2, otočí sa, narazí do robota 4, otočí sa, narazí do robota 2, otočí sa, narazí do robota 4, otočí sa a odíde z dráhy (keďže robot 1 aj robot 2 už odišli z dráhy). Takže robot 3 spravil dokopy 5 otočiek.

Tu si môžeme uvedomiť, že keď je robot B najbližší sprava od robota A (teda $B = A + 1$), tak robot B spraví o 2 otočky viac ako robot A. Napríklad ako to vidno pri robotoch 2 a 3. Teraz si vysvetlíme prečo. Všimnime si, že prvé otočenie robota A je pri strete s robotom B. Avšak než sa robot B stretne s robotom A, musí sa najskôr raz otočiť (aby išiel správnym smerom). Následne sa oba roboty rovnako veľa krát pootáčajú, až sa stretnú naposledy. To je vtedy, kedy sa robot A otočí doľava a má už voľnú cestu a môže odísť z dráhy. Robot B sa teda otočí doprava. Následne sa teda ešte raz musí otočiť, aby smeroval doľava, a už má voľnú dráhu a môže odísť. Teda robot B mal o jednu otočku na začiatku a jednu na konci viac ako robot A.

Vďaka tomuto zisteniu si vieme ľahko dopočítať počet otočiek postupne aj pre zvyšných robotov, a to nakoniec sčítať: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$ otočiek spolu.

Roboty počas experimentu spravia spolu 100 otočiek.

Úloha č. 4 (opravovali Betka Bohiniková a Lili Chovancová)

Koníky povedali tieto tvrdenia. Rozoberme si postupne všetky možnosti.

- ⚓ Prvý koník: Tretí a štvrtý hovoria pravdu.
- ⚓ Druhý koník: Piaty hovorí pravdu.
- ⚓ Tretí koník: Prvý hovorí pravdu a piaty klame.
- ⚓ Štvrtý koník: Práve dva koníky z tých predom mnou hovoria pravdu.
- ⚓ Piaty koník: Ja hovorím pravdu.

Povedzme, že prvý koník vždy hovorí pravdu. Potom musí byť pravdivé jeho tvrdenie „Tretí a štvrtý hovoria pravdu.“ Potom z pravdivého tvrdenia tretieho koníka vyplýva, že piaty klame. A ak štvrtý hovorí pravdu, tak tie dva pravdivé koníky pred ním sú tretí a prvý. Druhý koník musí teda klamať, a potom musí klamať aj piaty. V tomto rozpoložení všetko sedí. Všimnime si, že po tom, čo sme stanovili, že prvý je pravdivý, všetky ostatné koníky už mali len jednu možnosť: 1P, 2K, 3P, 4P, 5K.

Ak by prvý koník klamal, znamená to, že tvrdenie „Tretí a štvrtý hovoria pravdu.“ je nepravdivé. Toto tvrdenie je nepravdivé pokiaľ klame tretí koník, alebo štvrtý, alebo obaja. Všimnime si, že pokiaľ prvý klame, tak automaticky je tvrdenie tretieho koníka klamstvo. (Tvrdenie tretieho koníka je klamstvo pokiaľ prvý klame, alebo piaty hovorí pravdu, alebo obidve tieto možnosti platia naraz.) A tým pádom že klame prvý aj tretí, tvrdenie štvrtého koníka nemôže byť pravda. (Tvrdenie štvrtého koníka je nepravdivé pokiaľ z prvých troch koníkov hovoria pravdu tri, jeden alebo žiadny koník.) Pokiaľ teda klamú prvý, tretí a štvrtý, vidíme, že nech už sú druhý a piaty pravdiví alebo klamári, nijak to neovplyvní nepravdivosť zvyšných tvrdení. Avšak musia byť obaja buď klamári alebo obaja pravdiví, keďže tvrdia tú istú vec. Získavame tak ďalšie dve možnosti: 1K, 2K, 3K, 4K, 5K a 1K, 2P, 3K, 4K, 5P.

A keďže prvý koník môže byť len pravdivý alebo klamať, a zvyšné koníky sú diktované touto voľbou, prešli sme tým pádom všetky možnosti.

**Na základe tvrdení morských koníkov existujú 3 možnosti kto mohol hovoriť pravdu a kto klamať.
Sú to 1P, 2K, 3P, 4P, 5K; 1K, 2K, 3K, 4K, 5K a 1K, 2P, 3K, 4K, 5P.**