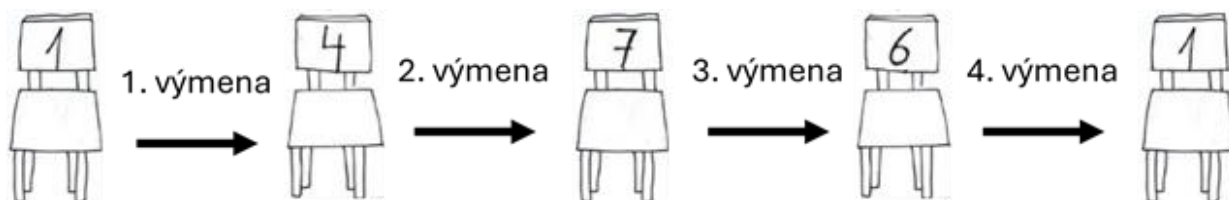
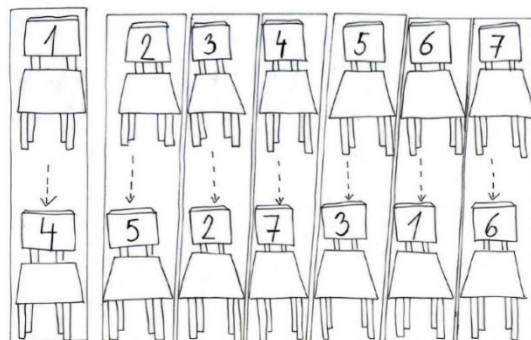




JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG
S E Z A M K O, Školský rok 2025/2026, 1. letná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravovala Kika Ďuračiková)

Viacerí ste si všimli, že po niekoľkých výmenách budú súťažiaci sedieť na tých istých stoličkách ako na začiatku. Súťažiaci Atl, Mal, Tlan a Anik, ktorí sedeli na stoličkách s číslami 1, 4, 6 a 7, sa vrátia na svoje miesto po štyroch výmenách. Napríklad Atl si bude presadať takto:



To znamená, že budú sedieť na svojich miestach aj po ôsmich výmenách, po dvanástich výmenách, aj po hocíjakom inom počte výmen, ktoré je deliteľné číslom štyri. Sto je deliteľné číslom štyri, preto títo štyria budú po sto výmenách sedieť na svojich pôvodných miestach.

Súťažiaci Mia, Tez a Met, ktorí na začiatku sedeli na stoličkách s číslami 2, 3 a 5, sa na svoje miesta vrátia po troch výmenách. Na svojich miestach budú sedieť aj po šiestich výmenách, po deviatich výmenách, aj po hocíjakom počte výmen, ktoré je deliteľné číslom tri. Kým sa vymenia 100-krát, tak na svojich pôvodných stoličkách budú sedieť naposledy po 99-tej výmene. Potom sa ešte raz vymenia.

Na konci budú sedieť na týchto stoličkách:

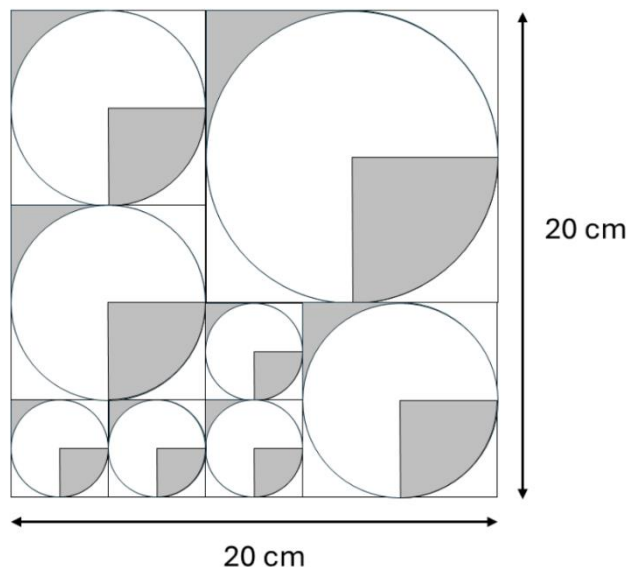
Atl	Mia	Tez	Mal	Met	Tlan	Anik
1	5	2	4	3	6	7

Úloha č. 2 (opravovala Kačka Bachratá)

Túto úlohu sme vybrali, lebo sme zistili, že ste celkom šikovní v rysovaní. A aby to nebolo len rysovanie, tak sme tam ešte pridali výpočet. A tak vznikla úloha, ktorej riešenie bolo náročnejšie, než niektoré z úloh v SEZAMe. Tak máte, milí riešitelia, za sebou tréning na vyššiu kategóriu.

Veríme, že to muselo byť náročné, keď ste konečne obrázok narysovali, začať ho vyfarbovať. Rysovanie je totiž tým lepšie, čím sú čiary tenšie a presnejšie. Napríklad, keď sa kružnica dotkne strany štvorca v jednom, jedinom bode. Takéto rysovanie dá veľkú prácu, navyše treba mať ostrú nielen ceruzu, ale aj kružidlo. Ale vyfarbovanie tie tenké presné čiary pokazí, tak to bolo určite veľmi ťažké.

Udelili sme veľa bodov všetkým riešiteľom, ktorým sa podarilo rysovať presne. Ale niektoré veci bolo treba aj vymyslieť a zdôvodniť. Keďže strana celého obrázku bola dlhá 20 cm, bolo treba vypočítať, že strana malého štvorca je dlhá 4 cm, strana stredného 8 cm a strana veľkého 12 cm. Najlepší z vás presne vysvetlili, prečo sú štvorce takto veľké, aj to, že stred vpísanej kružnice leží na priesečníku uhlopriečok štvorca. Najdôležitejšie je všimnúť si, že strana stredného štvorca je rovnako dlhá ako dve strany malého štvorca, a strana veľkého štvorca je rovnako dlhá ako strana malého a strana stredného štvorca dokopy. Preto strana celého obrázku je 5-krát taká dlhá ako strana malého štvorca, z čoho už ľahko dopočítame rozmery jednotlivých štvorcov.



Skoro všetci však vedeli správne vysvetliť, že spojením dvoch sivých častí v každom štvorci dostaneme zase štvorec, ktorého veľkosť je štvrtina pôvodného štvorca. A teda z celej plochy štvorcového obrázku dostaneme spolu sivú presne štvrtinu. Celý obrázok zaberá plochu s obsahom 400 cm^2 , preto

sivá plocha bude 100 cm^2 .

Úloha č. 3 (opravoval Ado Mrázik)

Našou úlohou je nájsť všetky trojciferné čísla, ktorých tretina aj trojnásobok sú trojciferné čísla. Máme podozrenie, že takýchto čísel je viac – podme zistiť, aké vlastnosti tieto čísla musia spĺňať.

Podľa zadania musí byť tretina hľadaného čísla trojciferné číslo. Keďže delením číslo znižujeme a nechceme, aby bolo príliš malé, nájdime najmenšie číslo, ktoré môže byť tretinou hľadaného čísla. Toto číslo je 100, teda najmenšie trojciferné číslo. Keďže $100 \cdot 3 = 300$, najmenšie možné hľadané číslo je 300. Čísla menšie ako 300 by po delení boli dvojciferné.

Ďalej platí, že aj trojnásobok hľadaného čísla musí byť trojciferné číslo. Keďže násobením číslo zväčšujeme a nechceme, aby bolo príliš veľké, nájdime najväčšie číslo, ktoré môže byť trojnásobkom hľadaného čísla. Toto číslo je 999, teda najväčšie trojciferné číslo. Keďže $999 : 3 = 333$, najväčšie možné hľadané číslo je 333. Každé trojciferné číslo väčšie ako 333 by po vynásobení číslom 3 bolo štvorciferné.

Zistili sme, že hľadané čísla musia byť väčšie alebo rovné ako 300 a menšie alebo rovné ako 333. Môžu to však byť všetky tieto čísla? Zopár si ich vyskúšajme.

$300 : 3 = 100$ a $300 \cdot 3 = 900$. Všetko sedí, čo znamená, že číslo 300 je jedným z hľadaných čísel.

$301 : 3 = 100,33333...$ Výsledok delenia je desatinné číslo a vieme, že trojciferné číslo nemôže byť desatinné. Číslo 301 teda nie je jedným z hľadaných čísel.

Skúšaním sme si všimli problém – nie všetky čísla po vydelení tromi sú celé, a teda ich nemôžeme považovať za trojciferné. Hľadané čísla teda ďalej musia byť aj deliteľné tromi bezo zvyšku. Podobný problém násobením nevznikne, keďže výsledok násobenia dvoch celých čísel je určite celé číslo.

Zistili sme, že výsledné čísla musia byť väčšie alebo rovné ako 300, menšie alebo rovné ako 333 a navyše tiež deliteľné číslom 3 bezo zvyšku.

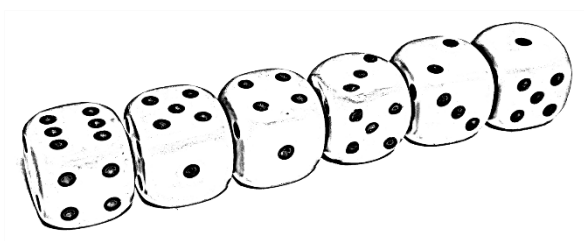
Hľadané čísla teda sú: 300, 303, 306, 309, 312, 315, 318, 321, 324, 327, 330 a 333.

Úloha č. 4 (opravovali Janka a Tomáš Trúsikovci)

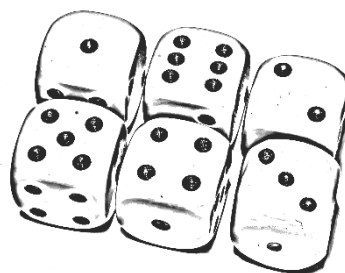
Milí Sezamkáči, veľmi sme sa potešili, koľko z vás sa zúčastnilo poslednej disciplíny na olympiáde. Úloha bola neľahká, z kociek zlepiť talizman, ktorý má na povrchu, čiže na viditeľných nezlepených stenách, čo najviac bodiek. Dostali sme od vás mnoho rôznych návodov na stavbu a najmä mnoho pekných obrázkov už postavených talizmanov. Do vzorového riešenia sa nám všetky nezmestia, ale za všetky vám posielame pochvalu.

Na to, aby sme postavili talizman s čo najväčším počtom bodiek na povrchu potrebujeme, aby mal na povrchu čo najviac stien. Je to to isté ako stavať talizman s čo najmenším počtom prilepených stien. Aby všetkých šesť kociek držalo pokope, potrebujeme, aby bola každá kocka prilepená aspoň jednou stenou. Jedno lepenie uberať talizmanu dve steny, jednu na každej kocke. Keď prilepíme k prvej kocke druhú, lepenie nám ubralo dve steny. Keď k týmto dvom kockám prilepíme ďalšiu, celkovo sme prišli už o štyri steny. Keď takto dolepíme všetkých šesť kociek, zalepených a teda na povrchu neviditeľných stien je

aspoň desať. Keďže chceme vidieť, čo najviac bodiek, a teda čo najviac stien, budeme sa snažiť postaviť talizman s práve desiatimi zalepenými stenami.



(5 lepení, t.j. 10 neviditeľných stien)



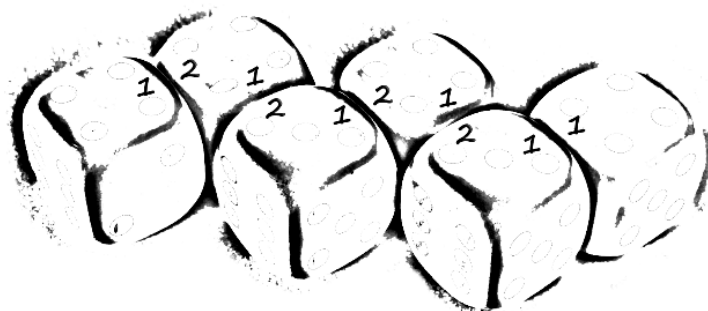
(7 lepení, t.j. 14 neviditeľných stien)

Už vieme, že potrebujeme talizman takého tvaru, aby sme lepili päťkrát. Ale to stále nie je koniec. Musíme lepovať také steny, ktoré nám na povrchu nechajú viditeľných čo najviac bodiek. Teda tie zlepuvané steny musia mať bodiek čo najmenej. Najlepšie by bolo, keby sa podarilo zlepiť všetkých šesť stien s jednou bodkou a k tomu ešte štyri steny s dvoma bodkami. Všetky zvyšné steny by tak ostali na povrchu talizmanu.

Vieme teda, ako chceme stavať a lepovať. Tu sú dve ukážky talizmanov, ktoré všetky naše podmienky spĺňajú. Všetky možné talizmany nekreslíme, lebo je ich veľmi veľa a do vzorových riešení by sa nezmestili.



Čo je na nich dôležité sú zlepené steny. Napríklad prvý talizman je lepený takto:



Ešte sme zabudli odpovedať na otázku koľko najviac bodiek môže mať talizman na povrchu. Keďže každá kocka má spolu $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ bodiek, šesť kociek ich má celkovo $6 \cdot 21 = 126$. Na každej kocke sme zalepili stenu s jednou bodkou a na štyroch kockách ešte aj steny s dvoma bodkami. Celkovo sme teda zalepili $6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 14$ bodiek.

Najviac bodiek na povrchu talizmanu je teda $126 - 14 = 112$ bodiek.