

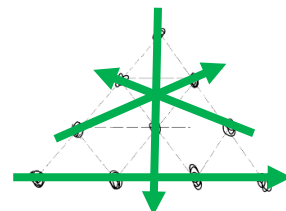


**JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU**  
**XXXIX. ročník S E M inára Z A u j í m a v e j M a t e m a t i k y**  
**pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG**  
**S E Z A M, Školský rok 2025/2026, 3. zimná séria**  
**Vzorové riešenia**

**Úloha č. 1 (opravovala Štefka Glevitzká)**

Pre vyjasnenie zadania, úlohou bolo zistiť, koľko najmenej mincí musel námorník zaplatiť, keď zhodil všetkých 10 koliek štyrmi hodmi. Jedným hodom šlo zhodiť iba kolky na jednej priamke (akejkolvek, teda námorník nemusel celý čas stáť na jednom mieste), a to iba tak, že hod presne kopíroval časť tejto priamky. Navyše, za každý hod, ktorý bol rovnobežný s niektorou stranou veľkého trojuholníka (a teda aj taký, čo priamo prešiel po celej jeho strane), musel zaplatiť jednu mincu (čiže najviac mohol zaplatiť 4 mince).

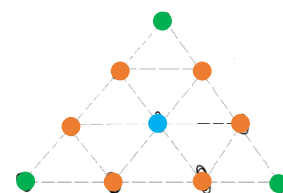
Po chvíli skúšania ste isto našli nejaké spôsoby hádzania, kedy námorník zaplatí 3 alebo 4 mince. Niektorí ste časom našli aj **spôsob ako zaplatiť len 1 mincu**. A to napríklad tak ako na obrázku vpravo. Ale spôsob, kedy nezaplatíme nič akosi stále nevychádzal. Mohli by sme si teda myslieť, že 1 minca je najmenej, čo treba zaplatiť.



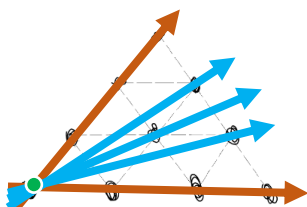
**Tu ale riešenie nekončí.** Ak si ozaj chceme byť istí, že námorník musel zaplatiť aspoň 1 mincu, tak treba poriadne zdôvodniť, že 0 mincí nestačí. Ako na to? Krátke riešenie by bolo asi takéto: Dôležité je uvedomiť si, že každý bezplatný hod zhodí najviac dve kolky naraz. Keby teda za všetky 4 hody nezaplatil, zhodil by tak najviac 8 koliek ( $4 \cdot 2$ ). Avšak on ich zhodil viac (až 10), teda všetky hody nemohli byť bezplatné. Čiže musel zaplatiť aspoň jednu mincu. Keďže spôsob ako zaplatiť len 1 mincu sme už našli, vieme, že

**námorník musel zaplatiť najmenej jednu mincu.**

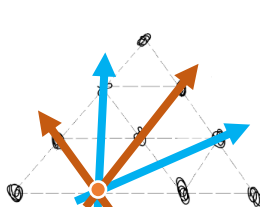
Prečo je ale pravda, že každý bezplatný hod zhodní najviac dve kolky? Pozrime sa ako vyzerajú bezplatné hody – teda tie, ktoré nie sú rovnobežné so žiadnou stranou trojuholníka. Nebudeme kresliť všetky, pretože tých, ktoré zhodia iba jednu kolku je nekonečne. Zameriame sa preto na tie, ktoré zhodia aspoň dve kolky. Navyše, rozdelíme ich podľa toho, ktorú kolku zhodia ako prvú. No aby sme si to ešte zjednodušili, uvedomme si, že máme iba 3 typy koliek – v rohoch veľkého trojuholníka (zelenou), v strede (modrou) a tie zvyšné (oranžovou). To preto, lebo trojuholník je veľmi symetrický – keď si ho vhodne otočíme alebo zozrkadlíme, tak vyzerá rovnako. (A rovnako sa otočia alebo zozrkadlia aj hody.) Teda sa nám stačí pozrieť iba na hody, ktoré zhodia



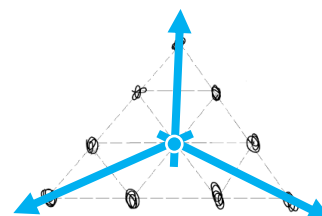
1) prvú zelenú kolku:



2) prvú oranžovú kolku



3) prvú modrú kolku:



Oranžovou sú nakreslené hody, za ktoré musíme zaplatiť 1 mincu. Tie bezplatné sú modrou. A tu už pekne vidíme, že všetky modré zhodia iba dve kolky. Teda naozaj je pravda, že bezplatným hodom možno zhodiť najviac dve kolky.

*Poznámka: Zo zdôvodnenia, že 0 mincí nestačí, sa dá aj vyčítať ako musí vyzeráť spôsob na zaplatenie iba 1 mince. Totiž ak chceme platiť iba za jeden hod, tak zvyšné tri zhodia každý po dve kolky, teda dokopy 6 koliek. Preto ak máme zhodiť všetkých 10, tak ten platený hod musí zhodiť 4 kolky, a to sa dá iba po nejakej zo strán veľkého trojuholníka. Menší trojuholník, ktorý nám tak zostal, musíme pozhadzovať troma bezplatnými hodmi, a nie je ťažké si uvedomiť, že to sa dá len jedným spôsobom – tak ako na prvom obrázku.*

## Úloha č. 2 (opravovala Ajka Kucharíková)

Našou úlohou je nájsť aspoň jedno číslo so zápisom 20XYZ25, ktoré je deliteľné číslom 2025. Potom máme zistiť, koľko je všetkých takýchto čísel.

Zistíme najskôr, koľko je všetkých čísel v tvare 20XYZ25 (ktoré z nich sú deliteľné 2025 zistíme potom). Urobíme to tak, že nájdeme najmenšie a najväčšie takéto číslo a spočítame koľko je čísel medzi nimi. Najmenšie takéto číslo dostaneme, keď za X, Y a Z dosadíme nuly. Je to 2000025. Najväčšie takéto číslo dostaneme, keď za X, Y a Z dosadíme deviatky. Je to 2099925. Takže všetkých čísel spĺňajúcich tvar 20XYZ25 je počet čísel od 2000025 do 2099925, a to je tisíc. Stačilo by týchto tisíc čísel vyskúšať, či sú deliteľné číslom 2025, a mali by sme vyriešenú úlohu. To sa nám ale skúšať nechce :).

Podme spomedzi nich skúsiť nájsť aspoň jedno deliteľné číslom 2025. Teda číslo tvaru 20XYZ25, ktoré je deliteľné 2025. Potom budeme hľadať zlepšováky, aby sme ich nemuseli skúšať všetky. Začnime od najmenšieho 2000025 (keďže máme zistiť koľko je všetkých, tak nech v tom máme systém) a overme, či je deliteľné 2025. Vypočítame  $2000025 : 2025 = 987,6$ , a teda zistíme, že nie je deliteľné. Takto by sme mohli skúšať postupne ďalej  $200125 : 2025 = 987,716\dots$ , alebo to môžeme urobiť naopak násobením.

Najbližšie väčšie číslo ako  $987,6$  je 988. A teda najbližšie číslo väčšie ako 2000025 a zároveň deliteľné 2025 by malo byť  $988 \cdot 2025 = 2000700$ . Toto nie je v správnom tvare, lebo sa nekončí 25, ale to už ľahko napravíme. Skúsime sa pozrieť na ďalšie číslo deliteľné 2025. To vieme nájsť buď takto  $2000700 + 2025 = 2002725$ , alebo zase násobením o jedna väčšieho čísla od 988. Teda  $989 \cdot 2025 = 2002725$ . O tomto čísle vieme, že je to násobok 2025, takže ním musí byť aj deliteľné. Zároveň má dobrý tvar, začína na 20 a končí na 25. Takže máme prvé číslo spĺňajúce zadanie a vyriešenú prvú časť úlohy. Podme hľadať ostatné.

Pozrime sa čo stane, keď k správnomu číslu 2002725 pričítame 2025:

$$2002725 + 1 \cdot 2025 = 2002725 + 2025 = 2004750$$

$$2002725 + 2 \cdot 2025 = 2002725 + 4050 = 2006775$$

$$2002725 + 3 \cdot 2025 = 2002725 + 6075 = 2008800$$

$$2002725 + 4 \cdot 2025 = 2002725 + 8100 = 2010825$$

Len jedno z nových čísel je zase v tvare 20XYZ25. Začiatok 20 je v poriadku, ale posledné dvojčíslenie sa mení. Začínáme s 20002725, kde je posledné dvojčíslenie 25. Ak k nemu pripočítame  $1 \cdot 2025 = 2025$ ,  $2 \cdot 2025 = 4050$ ,  $3 \cdot 2025 = 6075$ , tak sa vždy posledné dvojčíslenie zmení. Až keď pripočítame  $4 \cdot 2025 = 8100$ , tak ostane posledné dvojčíslenie 25. Lebo 00 na konci 8100 ho nezmení. Zároveň je 8100 najmenší násobok 2025, pre ktorý toto platí.

Takže na nájdenie všetkých čísel zo zadania nám stačí zobrať 2002725 a postupne pripočítavať 8100, až pokiaľ neprejdeme na čísla väčšie ako 2099925. Teda  $2002725 + 8100 = 2010825$ ,  $2010825 + 8100 = 2018925$ , a tak ďalej. **Týchto čísel je 13 a sú to tieto:**

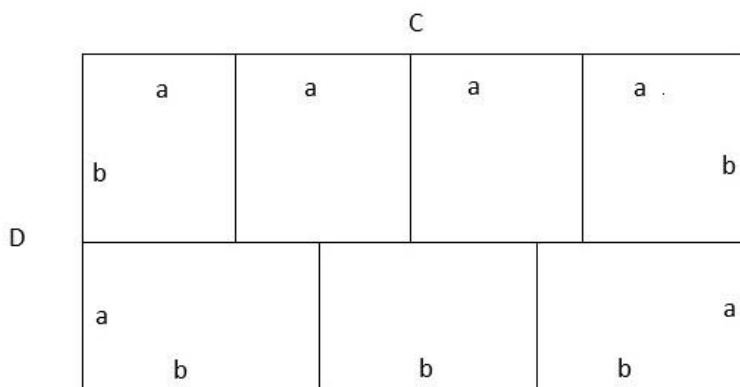
**2002725, 2010825, 2018925, 2027025, 2035125, 2043225, 2051325, 2059425, 2067525, 2075625, 2083725, 2091825 a 2099925.**

*Príklad sa dal riešiť rôznymi spôsobmi. Čísla na konci nebolo treba vypísať, ale napríklad zistiť koľkokrát sa 8100 zmestí do 99900 ( $2099925 - 2000025 = 99900$ ). Je to  $99900 : 8100 = 12,3$ . A ešte treba skontrolovať či to bude 12 alebo 13.*

*Iný spôsob by bol pozrieť sa na deliteľnosť číslom 2025. Keďže  $2025 = 81 \cdot 25$ , tak treba riešiť deliteľnosť číslami 25 a 81. Takto sa dá tiež dostať k riešeniu.*

### Úloha č. 3 (opravovala Denisa Múthová)

Našou úlohou je zistiť obvod obdĺžnikového ostrova. Ostrov má tvar obdĺžnika s obsahom  $336 \text{ m}^2$  a je rozdelený na sedem navzájom zhodných obdĺžnikov, ako je vidieť na obrázku.



Najčastejšie riešenia začínali tým, že ste si označili strany malého obdĺžnika  $a$  a  $b$ , a strany veľkého  $C$  a  $D$ . Ako je vidieť na obrázku, dve protiľahlé strany veľkého obdĺžnika s dĺžkou  $C$  sa skladajú raz zo štyroch strán dĺžky  $a$ , a raz z troch strán dĺžky  $b$ . To znamená, že platí:

$$4 \cdot a = 3 \cdot b \text{ alebo } \frac{b}{a} = \frac{4}{3}.$$

Teda pomer strán  $b : a$  môže byť  $4 : 3$  (v základnom tvare) alebo jeho „násobok“, napríklad  $8 : 6$ ,  $12 : 9$ , a podobne.

Ďalej vieme zistiť obsah malého obdĺžnika. Obsah veľkého obdĺžnika je  $336 \text{ m}^2$ , a keďže je rozdelený na 7 rovnakých obdĺžnikov, vieme vypočítať obsah jedného malého obdĺžnika nasledovne  $336 : 7 = 48 \text{ m}^2$ . Malý obdĺžnik má strany dĺžky  $a$  a  $b$ , teda:

$$a \cdot b = 48.$$

Keď chceme nájsť  $a$  a  $b$ , stačí nám systematicky skúšať možné hodnoty:

- ak by  $a = 3 \text{ m}$  a  $b = 4 \text{ m}$ , obsah by bol  $3 \cdot 4 = 12 \text{ m}^2$ , čo je menej ako  $48 \text{ m}^2$ ;
- ak  $a = 6 \text{ m}$  a  $b = 8 \text{ m}$ , obsah je  $6 \cdot 8 = 48 \text{ m}^2$ , čo je správne;
- väčšie násobky by už dali obsah väčší ako  $48 \text{ m}^2$ , takže ich nepoužijeme.

Teraz zistíme strany veľkého obdĺžnika:

- strana  $C = 4 \cdot a = 4 \cdot 6 = 24 \text{ m}$ ,
- strana  $D = a + b = 6 + 8 = 14 \text{ m}$ .

Obdĺžnik má dve strany dĺžky  $C$  a dve dĺžky  $D$ , takže obvod je  $24 + 24 + 14 + 14 = 76 \text{ m}$ .

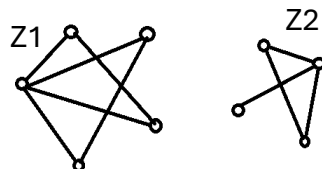
**Obvod obdĺžnikového ostrova je 76 m.**

#### Úloha č. 4 (opravovala Erika Novotná)

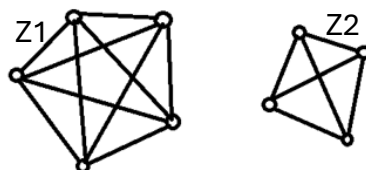
Milé deti, veľa z vás si zaslúži pochvalu. Vaše riešenia totiž začínali vetou: „Hru som si zahral s rodinou, kamarátom...“. Toto je pekný spôsob nielen ako si ozrejmiť pravidlá hry, ale aj ako dostať pár nápadov.

Označme si ostrovy zo zásobami Z1 a Z2. Vieme, že kapitán začína a následne sa hráči v ťahoch striedajú. Teda kapitán robí nepárne ťahy a cechmajster párne. **Predpokladajme teraz, že kapitán aj cechmajster nerobia hlúposti** – a teda **neprepoja** ostrovy so zásobami skôr, ako to je **nevyhnutné**. Ako by teoreticky mohli byť ostrovy poprepávané predtým, ako jeden z hráčov urobí posledný prehrávajúci ťah? Určite je každý z ostrovov bez zásob spojený s jedným z ostrovov so zásobami. Ak by to tak nebolo, vedeli by sme tento most dostavať a neprehrať.

Jedna zo situácií, čo môže nastať je, že na ostrov Z1 sú napojené štyri ostrovy bez zásob, na ostrov Z2 zvyšné tri. Skupina deviatich ostrovov sa rozdelí vlastne na dve súostrovia. Na obrázku vpravo vidíte ako mohla situácia vyzerať po desiatich ťahoch.



Na rade je teraz kapitán – vie ešte urobiť ťah? Odpoveď je áno – vie dokresliť hocikaký most na jednom zo súostrovií, ktorý tam ešte postavený nie je. Takto sa hráči striedajú, až kým sa už žiadny ďalší most dokresliť nedá. To nastane vtedy, keď v každom súostroví už všetky mosty postavené budú. Porátajme teraz mosty – je ich dokopy 16 (desať v súostroví Z1 a šesť v súostroví Z2). Ďalší most už prepojí súostrovia, na rade je kapitán, a teda prehrá.



Rozoberme teraz ďalšie situácie, čo mohli nastať, a zapíšme si ich všetky do tabuľky (zámena počtu ostrovov v riadku medzi Z1 a Z2 zachová celkový počet ostrovov):

| Počet ostrovov<br>v súostroví Z1 | Počet ostrovov<br>v súostroví Z2 | Počet mostov<br>v súostroví Z1 | Počet mostov<br>v súostroví Z2 | Celkový<br>počet<br>mostov |
|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------|
| 5                                | 4                                | 10                             | 6                              | 16                         |
| 6                                | 3                                | 15                             | 3                              | 18                         |
| 7                                | 2                                | 21                             | 1                              | 22                         |
| 8                                | 1                                | 28                             | 0                              | 28                         |

K počtom mostov pre jednotlivé súostrovia sa dá dostať napr. spočítaním, keď si danú možnosť nakreslíme. Dajú sa vymyslieť aj pekné vzorčky a postupy – tie vám však v tomto riešení neprezradíme. Radšej vám dáme úlohu: „Skúste zistiť, koľko najviac mostov sa dá postaviť v súostroví s 2026 ostrovmi.“

Vráťme sa späť k tabuľke. Celkový počet mostov v každom riadku je párny. Teda, ak ani jeden hráč nechce prepojiť ostrovy so zásobami skôr, ako to je nevyhnutné, tak postavia párny počet mostov. Následný nepárny ťah prislúcha kapitánovi, a ten ním prepojí súostrovia a prehrá.

**Teda cechmajster, ak hrá pozorne, vyhrá. Jeho stratégia je jednoduchá – neprepojiť súostrovia so zásobami z nepozornosti.**