



JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXIX. ročník S E M inára Z A U jímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG
S E Z A M, Školský rok 2025/2026, 2. letná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravovala Denisa Múthová)

Najčastejšie ste riešili túto úlohu zápisom do rovníc. Podme si teda napísať najbežnejšie riešenie. Úryvok zo zadania: Traja žiaci povedali nasledujúce pravdivé tvrdenia:

1. „Žiakov v tejto škole, ktorí nesedia na prízemí, je 42.“
2. „Žiakov, ktorí nesedia na druhom poschodí, je 48.“
3. „Na prvom poschodí sedí polovica všetkých žiakov.“

Označíme si počty žiakov na jednotlivých poschodiach.

- Nech x je počet žiakov na prízemí.
- Nech y je počet žiakov na prvom poschodí.
- Nech z je počet žiakov na druhom poschodí.
- Nech T je počet všetkých žiakov dokopy.

Z prvej vety vieme počet žiakov, ktorí nesedia na prízemí, teda sedia na prvom alebo na druhom poschodí. Preto platí $y + z = 42$. Z druhej vety vieme počet žiakov, ktorí nesedia na druhom poschodí, teda sedia na prízemí alebo na prvom poschodí. Preto platí $x + y = 48$. Z tretej vety vieme, že na prvom poschodí sedí polovica všetkých žiakov. To znamená, že y je polovica z T . Zapišeme to takto: $y = T : 2$.

Keďže $T = x + y + z$, môžeme dosadiť do rovnice tretej vety. Dostaneme $y = (x + y + z) : 2$. Obe strany vynásobíme číslom 2, a tak dostaneme $2 \cdot y = x + y + z$. Odčítame y na oboch stranách. Dostaneme: $y = x + z$. Teraz máme tri rovnice:

$$\begin{aligned}y + z &= 42 \\x + y &= 48 \\y &= x + z\end{aligned}$$

Začneme tým, že z rovnice $y = x + z$ už máme y vyjadrené pomocou x a z . Toto vyjadrenie budeme dosadzovať do zvyšných rovníc. Dosadíme $y = x + z$ do rovnice $y + z = 42$:

$$(x + z) + z = 42$$

Upravíme:

$$x + 2 \cdot z = 42, \text{ a teda } x = 42 - 2 \cdot z$$

Teraz dosadíme $y = x + z$ do rovnice $x + y = 48$. Dostaneme:

$$\begin{aligned}x + (x + z) &= 48 \\2 \cdot x + z &= 48\end{aligned}$$

Dosadíme $x = 42 - 2 \cdot z$:

$$\begin{aligned}2 \cdot (42 - 2 \cdot z) + z &= 48 \\84 - 4 \cdot z + z &= 48 \\84 - 3 \cdot z &= 48\end{aligned}$$

Prehodíme členy tak, aby sme mali kladný koeficient pri z :

$$\begin{aligned}3 \cdot z &= 84 - 48 \\3 \cdot z &= 36\end{aligned}$$

Obe strany vydělíme číslom 3. Dostaneme $z = 12$.

Keď už poznáme z , dopočítame najprv y z rovnice $y = 42 - z$. Dostaneme $y = 42 - 12$, preto $y = 30$. Potom dopočítame x z rovnice $x + y = 48$. Dostaneme $x = 48 - 30$, a teda $x = 18$. Nakoniec spočítame počet všetkých žiakov. Dostaneme $T = 18 + 30 + 12$, takže $T = 60$.

V škole je spolu 60 žiakov. Na prízemí sedí 18 žiakov. Na prvom poschodí sedí 30 žiakov. Na druhom poschodí sedí 12 žiakov.

Poznámka: Na vyriešenie tejto úlohy nebolo potrebné vedieť tvrdenia zapísať do rovníc a upravovať ich. Úloha sa dá riešiť aj úvahami. Napríklad, sčítajme počet žiakov z prvej a druhej vety. Tých je spolu 90. Môžeme si uvedomiť, že počet všetkých žiakov mimo prízemí plus počet všetkých mimo druhého poschodia je vlastne počet všetkých žiakov plus počet tých na prvom poschodí. A keďže vieme, že na prvom poschodí je polovica všetkých, tak teda číslo 90 predstavuje tri polovice počtu všetkých žiakov. Preto všetkých žiakov je 60 a z toho už ľahko dopočítame počet žiakov na prvom poschodí, čo nám zas pomôže zistiť počet žiakov na prízemí a na druhom poschodí.

Úloha č. 2 (opravovali Jana a Tomáš Trúsikovci)

Milí Sezamáci, teší nás, že sa väčšine z vás podarilo úlohu vyriešiť. Spôsobov riešenia bolo viacero, dve najčastejšie si tu ukážeme.

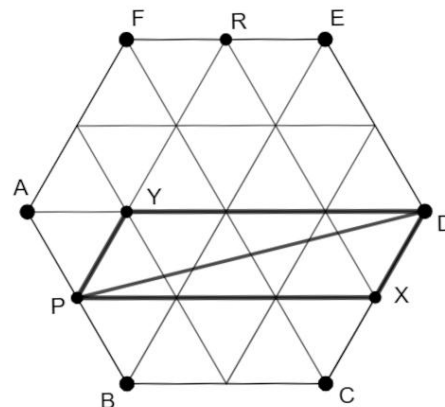
1. spôsob:

Pravidelný 6-uholník ABCDEF sa dá rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov pomocou úsečiek AD, BE a FC. Každý z týchto trojuholníkov vieme rozdeliť na štyri rovnostranné trojuholníčky pomocou stredných priecok. Týmto spôsobom pôvodný 6-uholník rozdelíme na 24 zhodných rovnostranných trojuholníkov.

Územie prvého tímu, štvoruholník APRF, obsahuje 5 z týchto trojuholníkov.

Územie druhého tímu vieme rozdeliť na dve časti. Prvá, štvoruholník PBCX, ktorá obsahuje rovnako 5 trojuholníkov, a druhá, trojuholník PXD. Ten má polovicu obsahu rovnobežníka PXDY, ktorý obsahuje 6 trojuholníkov, a teda trojuholník PXD ich obsahuje 3. Celkovo má územie druhého tímu $5 + 3 = 8$ trojuholníkov.

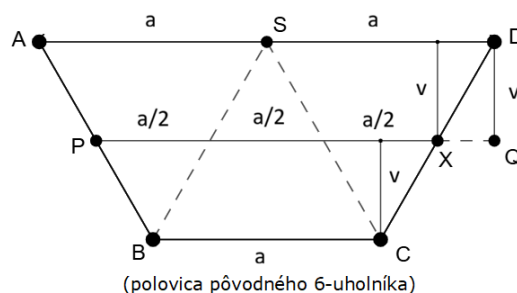
Obsahy území oboch tímov teda nie sú rovnaké a sú v pomere APRF : BCDP = 5 : 8.



2. spôsob:

Pri tomto spôsobe budeme pracovať so vzorcami na výpočet obsahu lichobežníka a trojuholníka. Našou úlohou je preto zistiť dĺžky základní a výšku útvarov, z ktorých sú územia oboch tímov poskladané.

Pravidelný 6-uholník ABCDEF sa dá rozdeliť na šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov s dĺžkou strany a . Úsečku PX tvoria tri stredné pričky týchto trojuholníkov, a preto $|PX| = \frac{3}{2}a$. Stredná prička trojuholníka, na základe rovnakej podobnosti, rozdeľuje aj jeho výšku na polovicu, a preto výška lichobežníka PBCX a lichobežníka APXD je rovnaká, označme jej dĺžku ako v . Pre naše výpočty potrebujeme ešte výšku na stranu PX v trojuholníku PXD. Nakoľko je tento trojuholník tupouhlý, výška je mimo trojuholníka. Na našom obrázku je to úsečka DQ, ktorá má tiež dĺžku v .

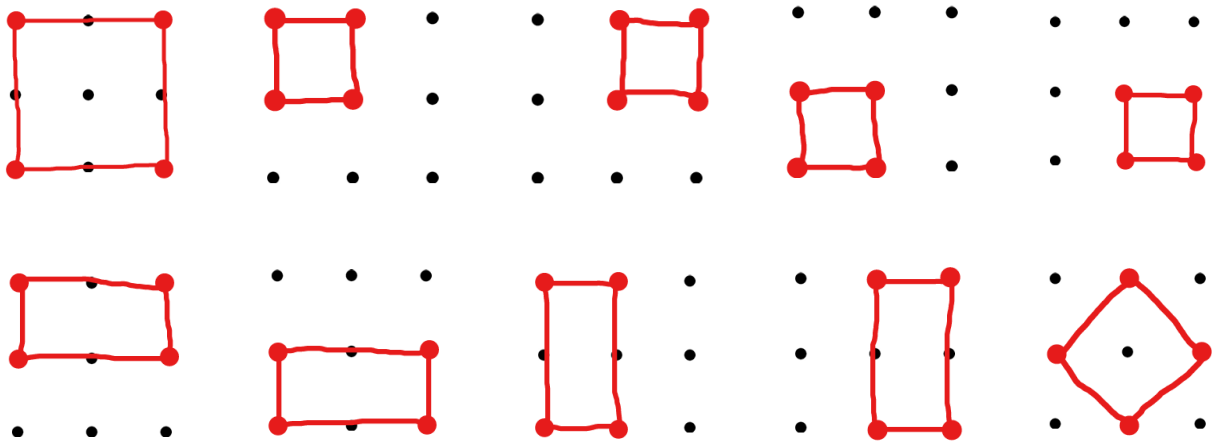


Obsah územia prvého tímu, teda obsah lichobežníka APRF, môžeme vypočítať ako $\frac{(a+\frac{3}{2}a)v}{2} = \frac{5}{4}av$ nakoľko je to lichobežník zhodný s lichobežníkom CXPB v našom obrázku. Obsah územia druhého tímu je zložený z lichobežníka CXPB, ktorého obsah už vieme a trojuholníka PXD, ktorého obsah vieme vypočítať ako $\frac{\frac{3}{2}av}{2} = \frac{3}{4}av$. Celkovo má tak obsah územia druhého tímu veľkosť $\frac{5}{4}av + \frac{3}{4}av = \frac{8}{4}av$.

Obsahy území oboch tímov teda nie sú rovnaké a sú v pomere APRF : BCDP = $\frac{5}{4}av : \frac{8}{4}av = 5 : 8$.

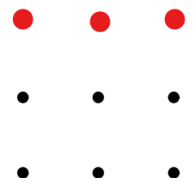
Úloha č. 3 (opravovala Timea Jakubócyová)

Najskôr by sme si mali rozmyslieť, aké pravouholníky môžeme dostať. Tu sú všetky možné pravouholníky:

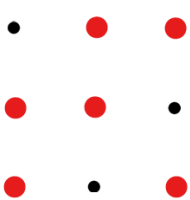


Skúsime chvíľu ignorovať posledný „šikmý“ pravouholník a pozrieme sa na to, čo majú spoločné zvyšné pravouholníky. Pre zvyšné pravouholníky vždy platí, že dva riadky majú zafarbené kamienky v dvoch rovnakých stĺpcoch. Napríklad, pri treťom pravouholníku platí, že v dvoch riadkoch, konkrétne v prvom a v druhom riadku, sú zafarbené kamienky v rovnakých stĺpcoch, konkrétne v druhom a v treťom stĺpci.

Ako nám to vie pomôcť? Skúsme sa zamyslieť, čo sa stane, keď v jednom riadku zafarbíme všetky tri kamienky ako na obrázku. Ak by sme teraz v druhom riadku zafarbili dva kamienky, tak určite budú v prvom a druhom riadku zafarbené kamienky v dvoch rovnakých stĺpcoch. Takže dostaneme pravouholník. To isté sa stane, aj keby sme zafarbili v treťom riadku dva kamienky. Keďže nechceme dostať žiadny pravouholník, môžeme v druhom a v treťom riadku zafarbiť najviac jeden kamienok. Dokopy teda môžeme zafarbiť najviac päť kamienkov. Podobne, keď zafarbíme všetky tri kamienky v inom riadku alebo v nejakom stĺpci, môžeme dokopy zafarbiť najviac päť kamienkov.



Ak by sme chceli zafarbiť viac ako päť kamienkov, nemôžeme zafarbiť všetky tri kamienky v žiadnom riadku ani v stĺpci. Teda v každom riadku môžeme zafarbiť najviac dva kamienky. To znamená, že dokopy môžeme zafarbiť najviac $2 + 2 + 2 = 6$ kamienkov. Poďme zistiť, či vieme zafarbiť šesť kamienkov. Vieme, že v každom riadku a v každom stĺpci potrebujeme zafarbiť presne dva kamienky. Po chvíľke skúšania dostaneme takéto zafarbenie kamienkov:



Super! Našli sme zafarbenie šiestich kamienkov, ktoré spĺňa zadanie. Vieme zafarbiť viac kamienkov? No keby sme chceli zafarbiť sedem alebo viac kamienkov, museli by sme v nejakom riadku alebo stĺpci zafarbiť tri kamienky. A už vieme, že ak zafarbíme v nejakom riadku alebo stĺpci tri kamienky, dokopy môžeme zafarbiť najviac päť kamienkov.

Takže Ariel vie zafarbiť najviac šesť kamienkov.

Úloha č. 4 (opravoval Matej Halama)

Naším cieľom je nájsť dve sady šiestich čísel napísaných po sebe tak, že dve čísla vedľa seba nám dajú číslo 72 po sčítaní prvého s dvojnásobkom druhého z nich. Ak druhú sadu nenájdeme, môžeme povedať, že Sebastián klamal.

Úloha sa dá riešiť viacerými spôsobmi, jedným z nich je vyskúšať všetky možnosti. To by bolo celkom zdĺhavé a preto si chceme určiť obmedzenia na čísla, ktoré budeme skúšať.

1. 2. 3. 4. 5. 6.

Vieme, že prvé číslo (označme ho A) s dvojnásobkom druhého čísla (označme ho B) sa musia rovnať 72, teda $A + 2 \cdot B = 72$. Vieme, že dvojnásobok ľubovoľného čísla je párny, a keďže 72 je taktiež párne, tak aj A musí byť párne. Toto platí pre prvých 5 čísel, keďže posledné číslo nie je nikdy prvé v dvojici. Zároveň používame kladné celé čísla, preto v dvojici druhé číslo musí byť menšie ako 36:

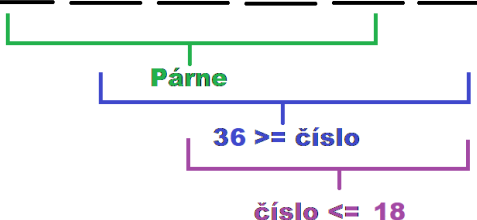
$$2 + 2 \cdot 35 = 72 \quad 0 + 2 \cdot 36 = 72 \quad -2 + 2 \cdot 37 = 72$$

Totíž ak by sme chceli dať za B väčšie číslo, za A by sme museli dať 0 alebo záporné čísla. Preto druhé až šieste číslo v sade bude menšie ako 36. Zároveň ak by bolo druhé číslo z dvojice 18 a menej, znamenalo by to, že prvé číslo dvojice by bolo 36 a viac:

$$32 + 2 \cdot 20 = 72 \quad 36 + 2 \cdot 18 = 72 \quad 40 + 2 \cdot 16 = 72$$

Keďže druhé až šieste číslo sady musí byť menšie ako 36, potom tretie až šieste číslo nemôže byť menšie ako 18. Pre druhé číslo v sade toto neplatí, pretože prvé číslo nemusí byť menšie ako 36.

1. 2. 3. 4. 5. 6.



Teraz vyskúšame dosadiť všetky čísla na 5. miesto v rade, pretože tu musíme spĺňať všetky tri podmienky, a teda stačí vyskúšať všetky párne čísla väčšie ako 18 a menšie ako 36. To sú 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32 a 34. Akonáhle zvolíme číslo na 5. mieste, vieme dopočítať všetky ostatné čísla. Ak chcete, môžete si zvoliť aj 3. alebo 4. miesto, ktoré taktiež musia spĺňať všetky podmienky. Vďaka týmto podmienkam nám stačí vyskúšať 8 možností namiesto 72.

1. miesto	2. miesto	3. miesto	4. miesto	5. miesto	6. miesto
	-56	64	4	34	19
	-40	56	8	32	20
	-24	48	12	30	21
	-8	40	16	28	22
52	8	32	20	26	23
24	24	24	24	24	24
-8	40	16	28	22	25
-40	56	8	32	20	26

Z tabuľky vidíme, že **existujú práve dve sady (podfarbené zelenou), ktoré spĺňajú našu úlohu, a preto vieme, že Sebastián neklamal.**

Poznámka: Úloha sa dala vyriešiť aj bez skúšania možností pomocou dosadzovania do rovníc alebo určením ďalších podmienok pre jednotlivé miesta v sade.