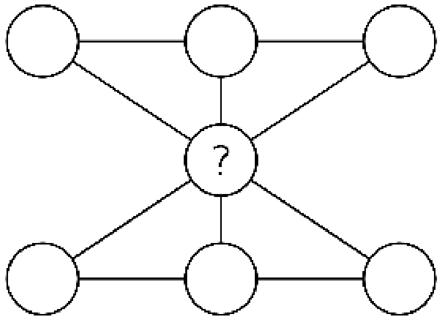
JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XX. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG

S E Z A M K O, Školský rok 2025/2026, 2. letná séria
Vzorové riešenia

***Úloha č. 1** (opravovali Zuzka Chovancová a Peťo Novotný)*

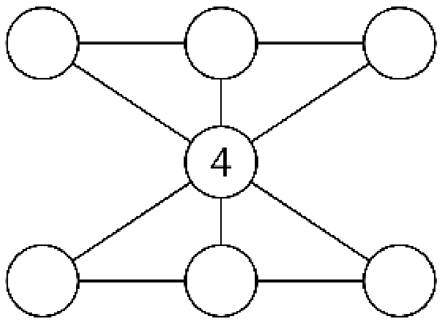


Úloha sa dá riešiť aj skúšaním – postupným dosadzovaním rôznych čísel, až kým to nevyjde. Pri takom skúšaní je však pomerne náročné prebrať všetky možnosti a ešte náročnejšie je potom spísať riešenie (z ktorého by malo byť zrejmé, že sme naozaj všetky možnosti prebrali).

Keďže zadanie úlohy vyžaduje určiť, ktoré číslo môže byť v strednom krúžku, namiesto skúšania sa zamyslime nad tým, za akých okolností sa ostatné čísla dajú doplniť, keď už v strede nejaké číslo je.

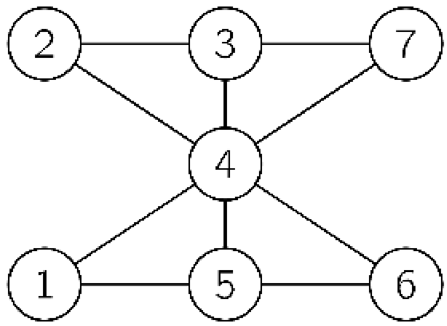
Obe trojice z horného a dolného poschodia musia mať rovnaký súčet. To znamená, že keď od všetkých siedmich čísel odoberieme číslo z prostrednej kajuty, zvyšok sa musí dať rozdeliť na dve rovnaké časti. Súčet všetkých siedmich čísel je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = = 28$. To je párne číslo, teda aby sa po odobratí čísla zo stredného krúžku dal zvyšok rozdeliť, odobrané číslo musí byť párne. Do úvahy tak prichádzajú iba čísla 2, 4 a 6. To už je oveľa menej možností na skúšanie.

Aby sme sa ale skúšaniu vyhli úplne, všimnime si, že prostredná kajuta sa nachádza na troch rovných čiarach určených trojicami kajút. Súčty zvyšných dvoch čísel v každej tejto trojici musia byť rovnaké. Zároveň dokopy tieto tri dvojice čísel spolu s číslom zo stredu tvoria celú sedmicu čísel. Keď teda číslo zo stredu odoberieme, zvyšok sa musí dať rozdeliť na tri rovnaké časti. Z čísel $28 - 2 = = 26$, $28 - 4 = 24$ a $28 - 6 = 22$ je však tromi deliteľné jedine číslo 24. Takže v strede môže byť iba číslo 4.



Že tam naozaj môže byť (a teda že čísla sa rozdeliť do krúžkov požadovaným spôsobom naozaj dajú) ľahko overíme doplnením ostatných čísel. Už vieme, že súčet v každej trojici musí byť $(28 - 4) : 2 = 12$, resp. že súčet zvyšných dvoch čísel v každej trojici prechádzajúcej prostriedkom musí byť $(28 - 4) : 3 = 8$. Teda už len musíme vhodne rozmiestniť dvojice $1 + 7$, $2 + 6$ a $3 + 5$ so súčtom 8, aby čísla hore a dole dali rovnaký súčet 12. To ide len takto: $2 + 3 + 7 = 1 + 5 + 6$. (Zadanie nevyžadovalo nájsť všetky rozmiestnenia, len zdôvodniť, ktoré čísla mohli byť v strede. Takže v tejto fáze, keď už vieme, že v strede mohlo byť len číslo 4, by stačilo už len uviesť rozdelenie bez ďalšieho zdôvodňovania.)

Posledný obrázok ukazuje jedno možné rozdelenie. Ďalšie možnosti vieme dostať výmenou hornej a dolnej časti a prehadzovaním čísel v rámci horného a dolného poschodia (tak, aby čísla so súčtom 8 zostali oproti sebe).



V strede musí byť číslo 4 a existuje viacero možností ako doplniť zvyšné čísla.

Iné riešenie: Ak ste sa dočítali až sem, ponúkame za odmenu ešte jednu peknú úvahu, s ktorou sa dalo prísť na to, že v strede musí byť číslo 4. Úlohu takto riešili piati z vás. Dokopy je 5 trojíc kajút ležiacich na jednej čiare. Pritom stredná kajuta leží na troch čiarach a všetky ostatné kajuty na dvoch čiarach. Keď spočítame dokopy všetkých päť trojíc dostaneme číslo deliteľné piatimi (keďže všetky trojice majú rovnaký súčet). Zároveň v tomto výsledku sú všetky čísla započítané 2-krát a prostredné ešte o jedenkrát navyše. Keďže $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 56$, *v strede musí byť číslo, ktorého pripočítaním k 56 vznikne číslo deliteľné piatimi. A to z našej sedmice spĺňa jedine číslo 4.*

Úloha č. 2 (*opravoval Hynek Bachratý****)***

Tento príklad ste zvládli veľmi dobre, pretože Hausnumer na šiestom schode mal pravdu a vedeli sme všetko, čo pre riešenie úlohy bolo treba.

Dalo sa postupovať dvomi správnymi postupmi. Prvý spočíval v tom, že ste si premysleli alebo aj napísali tabuľku, aké sú možnosti čísel 1 až 6 na jednotlivých schodoch. Pred tým, ako začneme čítať podmienky, môže byť teoreticky na každom schode každé číslo. Potom ste postupne analyzovali tvrdenia Hausnumerov z jednotlivých schodov a postupne vyraďovali zlé možnosti. Napríklad veta z prvého schodu „Sused nado mnou je párny a jeho číslo je väčšie ako moje“ znamená, že pre druhý schod môžem vylúčiť Hausnumerov 1, 3 a 5. Takto sa dalo postupovať ďalej a na konci ste mali správnu a jedinú odpoveď.

Druhá možnosť bola najskôr nad vetami kúsok porozmýšľať, a potom ich využívať v čo najlepšom poradí. Aj tento postup je správny a riešenie je kúsok kratšie. Preto si ho povieme celé.

Najskôr „5. schod: *Som párne číslo menšie ako 3.“* Také číslo je len 2, preto **5. schod = 2**.

Potom „4. schod: *Sused podo mnou je najmenšie číslo z nás a ja som súčet mojich susedov.“* Najmenšie číslo je 1 a je pod štvrtým schodom, teda **3. schod = 1**. Susedia štvrtého schodu sú 1 a 2 a ich súčet je 3, preto **4. schod = 3**.

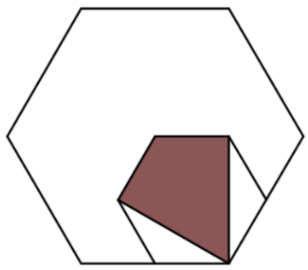
Teraz „2. schod: *Obaja moji susedia sú nepárni.“* Na susednom treťom schode je 1, to je v poriadku, a nepár musí byť aj na susednom prvom schode. Nepárne číslo ale zostalo už len číslo 5, preto **1. schod = 5**.

Ďalej „1. schod: *Sused nado mnou je párny a jeho číslo je väčšie ako moje."* Párne číslo väčšie ako 5 je len 6 a je ešte voľné, preto **2. schod = 6**.

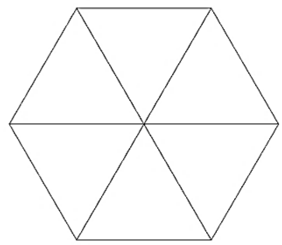
Zostalo nám už len posledné číslo 4 a neurčený šiesty schod. Preto musí platiť **6. schod = 4**. Hausnumer na 6. schode, ktorý tvrdil *„Už viete všetko, čo potrebujete,"* mal teda pravdu. Zároveň z postupu vyplýva, že nie je možné žiadne iné riešenie. Máme ale určite aspoň jedno?

Ak ste si všimli, ešte sme nepoužili vetu „3. schod: *Som nepárne číslo menšie ako obaja moji susedia."* K nájdeniu riešenia ju nepotrebujeme, ale treba overiť, či je pravdivá. Hausnumerovia sa mohli aj pomýliť a úloha by mala nejaké pokazené zadanie. Keďže ale na treťom schode je číslo 1, toto číslo je určite nepárne a menšie ako nielen jeho susedia. S číslom 1 bolo toto tvrdenie tak jasne platné, že ste ho mnohí neskontrolovali, ale nepovažoval som to za chybu na strhnutie bodov. Ale pozor, v iných úlohách by sa zabudnúť na takúto kontrolu nemuselo oplatiť.

Úloha č. 3 (*opravoval Matej Grochal****)***

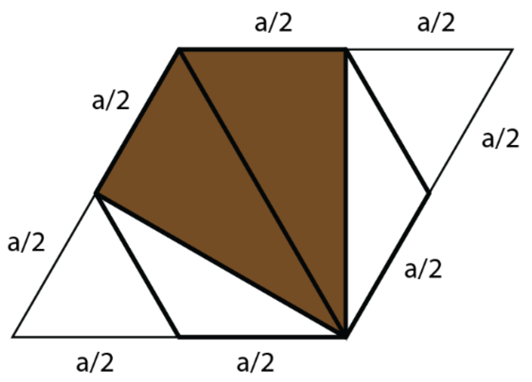


Pripomeňme si, že našou úlohou je zistiť, akú časť veľkej šesťuholníkovej placky tvorí kakaová poleva (hnedou na obrázku vľavo).



Pravidelný šesťuholník si vieme rozdeliť na 6 rovnakých rovnostranných trojuholníkov – – napríklad pomocou uhlopriečok (ako na obrázku vpravo).

Označme si stranu veľkého šesťuholníka ako *a*. Potom má menší šesťuholník stranu $\frac{a}{2}$. Môžeme si uvedomiť, že preto ľavý horný vrchol menšieho šesťuholníka leží v strede veľkého šesťuholníka. Teda menší šesťuholník s kakaovou polevou sa nachádza len v dvoch zo šiestich trojuholníkov nakreslených vyššie. Zamerajme sa teda na ne.



Všimnime si, že spoločná strana týchto dvoch trojuholníkov rozdeľuje vyfarbenú (kakovú) oblasť na dve polovice. Navyše, každá takáto polovica zodpovedá polovici jedného z týchto väčších trojuholníkov. Celá kakaová poleva teda pokrýva plochu jedného takého trojuholníka.

Keďže všetky trojuholníky majú rovnaký obsah a spolu tvoria celý šesťuholník, jeden z nich predstavuje 1/6 celej placky.

Kakaovou polevou je teda ozdobená 1/6 placky.

***Úloha č. 4** (opravovali Iva a Kika Jančigové)*

Čokoláda s rozmermi 6 cm x 3 cm má $6 \cdot 3 = 18$ štvorčekov s rozmermi 1 cm x 1 cm. Na menšie kúsky lámať nemôžeme, takže náčelníkova rodina môže mať najviac 18 členov. (Vo zvyšku riešenia všetky rozmery uvažujeme v centimetroch, aj keď jednotky už pre prehľadnosť nepíšeme.)

Najväčší štvorec, aký vieme spraviť, je 3x3 a takéto sa z našej čokolády dajú spraviť presne dva, takže náčelníkova rodina môže mať najmenej dvoch členov.

Nemáme v zadaní pravidlo, že by všetci členovia mali dostať rovnako veľké kúsky, takže potrebujeme zistiť, koľkými spôsobmi sa dá ešte čokoláda rozdeliť na štvorce 1x1, 2x2 a 3x3.

Ak by sme odlomili jeden štvorec 3x3, tak zvyšok čokolády veľkosti 3x3 môžeme ešte nalámať:

- na 9 kúskov 1x1, čiže rodina má 10 členov,
- na 1 kúsok 2x2 a 5 kúskov 1x1, čiže rodina má 7 členov.

Dva kúsky 2x2 sa ku 3x3 už nezmestia.

Ešte premyslíme možnosti so štvorcami 2x2. Môžeme spraviť:

- 1 štvorec 2x2 a 14 štvorcov 1x1, čiže rodina má 15 členov,
- 2 štvorce 2x2 a 10 štvorcov 1x1, čiže rodina má 12 členov,
- 3 štvorce 2x2 a 6 štvorcov 1x1, čiže rodina má 9 členov.

Štyri kúsky 2x2 sa už nezmestia, lebo dva nemôžu byť vedľa seba a tri pod sebou už pokryjú celú dĺžku čokolády.

Všetky možnosti lámania (až na umiestnenie štvorcov, ktoré počty členov rodiny neovplyvňuje) sú znázornené na obrázku nižšie.

Náčelníkova rodina môže mať 2, 7, 9, 10, 12, 15 alebo 18 členov.