



JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XL. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG
S E Z A M, Školský rok 2026/2027, 1. zimná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravovali Miška a Dominika Rosinské)

Na rozlíšenie písmena O a číslice 0, číslica 0 bude vždy označená symbolom θ . Kód môžeme upraviť rôznymi spôsobmi na vyriešenie úlohy. Prejdeme si spolu dva z nich.

Jeden spôsob je že si prepíšeme kód ako sčítanie pod seba. Všimneme si ako prvé, že $10 \cdot ONE = ONE\theta$, a tak po stĺpcoch kód vyzerá nasledovne:

Aby $E + E$ končilo nulou sú len dve možnosti, a to $E = \theta$ a $E = 5$.

$$\begin{array}{r} NONE \\ + ONE \\ \hline = ONE\theta \end{array}$$

Pre $E = \theta$ nám potom vyjde že zase $N + N$ sa musí končiť na θ . Tým že rôzne písmena musia byť nahradené rôznymi číslicami, jediná možnosť je $N = 5$, a kód vyzerá takto :

$$\begin{array}{r} 505\theta \\ + 05\theta \\ \hline = 05\theta\theta \end{array}$$

Jediná možnosť pre O vyplýva z prvého stĺpca, kde budeme potrebovať prechod cez desiatku z druhého stĺpca, aby platilo $O \neq 5$. Prechodom cez desiatku pridáme najviac 1, takže musíme mať $O = 6$. To ale nesedí v druhom stĺpci, lebo $6 + 6 + 1 = 13$, čo nesedí s $N = 5$.

Prejdime na druhú možnosť pre E , čo je $E = 5$. Máme prechod cez desiatku zo štvrtého do tretieho stĺpca, preto v treťom stĺpci platí, že $N + N + 1$ končí na cifru 5. Môže to byť iba 5 alebo 15 – podľa toho, či nastal prechod cez desiatku. Takže $N = 2$ alebo $N = 7$.

$$\begin{array}{r} NON5 \\ + ON5 \\ \hline = ON5\theta \end{array}$$

Pozrime sa ako vyzerá kód pre $N = 2$. Opäť máme pre O len jednu možnosť, čo znova vidno z prvého stĺpca – lebo nemôže byť rovné N , a tak musí byť o 1 väčšie od N vďaka prechodu cez desiatku v druhom stĺpci. Museli by sme mať teda $O = 3$, čo ale nesedí v druhom stĺpci lebo nedostaneme prechod cez desiatku, a navyše $3 + 3 = 6 \neq 2$, takže táto možnosť tiež nesedí.

$$\begin{array}{r} 2025 \\ + 025 \\ \hline = 025\theta \end{array}$$

Vrátime sa teda k možnosti $N = 7$. Vtedy máme v treťom stĺpci $7 + 7 + 1 = 15$, čo pridá prechod cez desiatku z druhého do tretieho stĺpca. Ako predtým, máme len jednu možnosť pre O , a to $O = 7 + 1 = 8$. Doplnili sme cifry za všetky písmená, kód má tvar $7850 + 875 = 8750$, čo sedí.

$$\begin{array}{r} 7075 \\ + 075 \\ \hline = 075\theta \end{array}$$

Existuje len jedno nahradenie písmen, pre ktoré je výpočet správny: $N = 7$, $O = 8$ a $E = 5$.

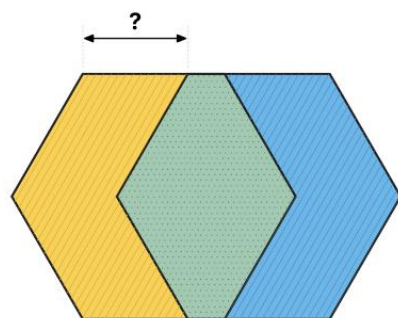
Iné riešenie: Ako iný spôsob si môžeme všimnúť, že na oboch stranách kódu je výraz ONE , jedenkrát vľavo a desaťkrát vpravo. Môžeme ho odpočítať z oboch strán, a zostane nám $NONE = 9 \cdot ONE$. Vo výraze $NONE$ vidíme, že výraz ONE sa ešte vyskytne. Aby sme ho mohli tiež odpočítať, môžeme prepísať $NONE$ ako $N \cdot 10\theta\theta + ONE$. Po odpočítaní z oboch strán dostaneme $N \cdot 10\theta\theta = 8 \cdot ONE$, ktorý ešte môžeme upraviť na $N \cdot 10\theta\theta : 8 = ONE$ po vydelení ôsmimi na oboch stranách. Hľadáme teda N -tisíc, ktorý bude mať po delení ôsmimi číslicu N na mieste desiatok. Môžeme si tieto možnosti vypísať :

$$\begin{array}{l} 1\theta\theta\theta : 8 = 125, 2\theta\theta\theta : 8 = 25\theta, 3\theta\theta\theta : 8 = 375, 4\theta\theta\theta : 8 = 5\theta\theta, 5\theta\theta\theta : 8 = 625, \\ 6\theta\theta\theta : 8 = 75\theta, 7\theta\theta\theta : 8 = 875 \text{ a ďalej budú výsledky 4-ciferné.} \end{array}$$

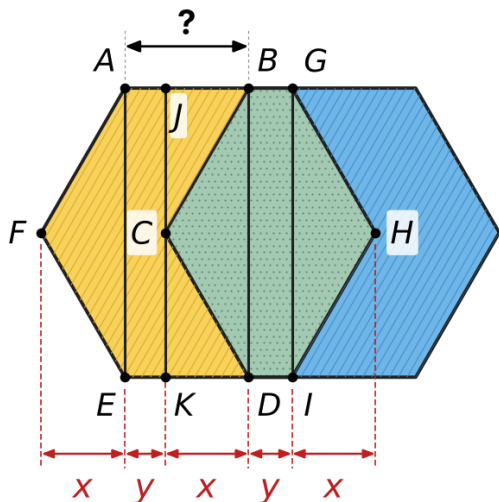
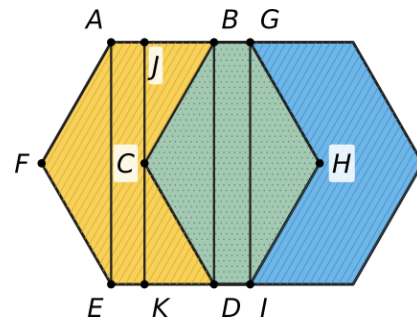
Jediný prípad kde máme N na mieste desiatok vo výsledku je pre $N = 7$, kde $ONE = 875$. Len jedno nahradenie číslicami je možné, a to O za 8, N za 7 a E za 5.

Úloha č. 2 (opravovali Jožo Jakubík a Danči Ondovčík)

Modrý šesťuholník (zelená a modrá plocha) a žltý šesťuholník (zelená a žltá plocha) sú zhodné, preto majú rovnaký obsah. Zelená plocha je spoločná pre oba šesťuholníky, a teda modrá a žltá plocha majú pri ľubovoľnom posunutí rovnaký obsah. Stačí sa preto zaoberať iba zelenou a žltou plochou, ktoré majú mať rovnaký obsah.



Tieto dve plochy si rozdelíme na niekoľko častí dokreslením nových čiar. Navyše si označíme body tak ako na obrázku vpravo, aby sa nám lepšie vyjadrovalo. Trojuholníky FEA a GIH sú odrezky z pravidelného šesťuholníka, takže sú zhodné a majú rovnaký obsah. Obsah trojuholníka je polovica súčinu základne a výšky, preto má trojuholník CDB polovičný obsah obdĺžnika KDBJ. Druhú polovicu obdĺžnika tvoria trojuholníky JCB a KDC. Ak teda majú mať zelená a žltá plocha rovnaký obsah, musia mať rovnaký obsah aj obdĺžniky EKJA a DIGB.



Keďže strany EA a DB majú rovnakú dĺžku, musia byť rovnako dlhé aj strany EK a DI. Túto dĺžku označme y , ako je to na obrázku vľavo. Dĺžku úsečky KD označme x a všimnime si, že kolmá vzdialenosť bodu F od úsečky AE aj bodu H od úsečky GI je tiež x .

Využime známu vlastnosť pravidelného šesťuholníka: jeho strana je rovná polomeru opísanej kružnice, a teda platí $|FH| = 2|EI|$. Z obrázka vidíme, že

$$3x + 2y = |FH| = 2|EI| = 2(x + 2y).$$

Po úprave dostávame $x = 2y$. Teda $y = 1/4|EI|$ a $x + y = |ED| = 3/4|EI|$. Dĺžka ED je rovná dĺžke AB, teda aj hľadanému posunutiu šesťuholníkov.

Šesťuholníky preto treba posunúť o $3/4$ dĺžky ich strany.

Úloha č. 3 (opravovala Timka Jakubócyová)

Vieme, že každý rytier povedal vetu „Obaja moji susedia sú klamári“. Najskôr si musíme uvedomiť, čo to znamená, keď túto vetu povie pravdovravný rytier, a čo to znamená, keď túto vetu povie klamár:

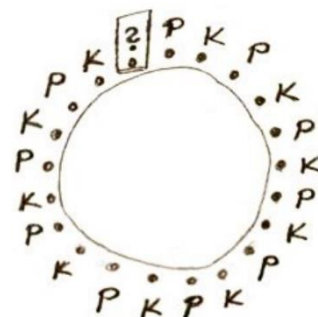
- Ak je rytier pravdovravný, tak to znamená, že obidvaja jeho susedia sú naozaj klamári.
- Ak je rytier klamár, tak máme dve možnosti:
 - buď sú obidvaja jeho susedia pravdovravní,
 - alebo jeden jeho sused je pravdovravný a jeden jeho sused je klamár.

Naším cieľom je zistiť najmenší možný a najväčší možný počet klamárov pri stole. Pozrieme sa najskôr na najmenší možný počet. Viacerí ste správne poznamenali, že ak chceme čo najmenej klamárov, potrebujeme čo najviac pravdovravných rytierov. A tu nám pomôže keď zistíme, koľko najviac pravdovravných rytierov môže sedieť pri sebe. Pre prehľadnejší zápis budeme používať značenie P = pravdovravný rytier a K = klamár.

Určite môžeme mať jedného pravdovravného rytiera. Môžeme mať dvoch pravdovravných rytierov pri sebe? Napríklad KPPK? V takom prípade, by mal každý z nich jedného suseda, ktorý nie je klamár. Takže obidvaja pravdovravní rytieri by klamali. A to sa nemôže stať. Rovnaký problém nastane, ak by pri sebe sedeli viac ako dvaja pravdovravní rytieri. Pravdovravný rytier teda vždy musí byť obklopený klamármí.

A z toho nám už vyplýva, že najväčší počet pravdovravných rytierov dostaneme, keď budeme striedať pravdovravných a klamárov.

Tu ale nastane jeden problém. Rytierov je 21, teda nepárny počet. To znamená, že nevieme uložiť všetkých rytierov na striedačku. Jeden rytier nám zvýši. Ak je tento jeden rytier pravdovravný, máme dvoch pravdovravných rytierov pri sebe. A už vieme, že to nemôže nastať. Ak je tento jeden rytier



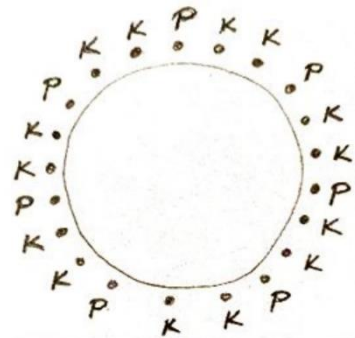
klamár, máme dvoch klamárov pri sebe. Táto možnosť je v poriadku. Teda najväčší možný počet pravdovravných rytierov je 10.

Preto najmenší možný počet klamárov je 11.

Teraz sa pozrieme na najväčší možný počet klamárov. Podobne ako predtým, aj teraz nám pomôže zistiť koľko najviac klamárov môže sedieť pri sebe. Určite môžeme mať jedného klamára. Taktiež dvaja klamári môžu sedieť pri sebe, napríklad takto: PKKP. Ak by pri sebe sedeli traja klamári (KKK), prostredný klamár by hovoril pravdu. To sa nemôže stať. Rovnaký problém by nastal, ak by pri sebe sedeli viac ako traja klamári. Takže pri sebe môžu sedieť najviac dvaja klamári.

Z toho vyplýva, že najväčší možný počet klamárov dostaneme tak, že skúsime k stolu posadiť čo najviac dvojčiek klamárov. To sa dá spraviť tak ako na obrázku.

Z obrázku vidíme, že **najväčší možný počet klamárov je 14.**



Úloha č. 4 (opravovali Vierka Glevitzká a Alica Kubjatková)

Táto úloha sa dala riešiť viacerými zaujímavými spôsobmi. Máme *aspoň** 2026 možností, medzi ktorými potrebujeme nájsť tie, ktoré vyhovujú podmienkam zo zadania. Veľmi by nám preto pomohlo, keby sme ich vedeli nejako preriediť.

Keď hľadaný rok zvážšime o 4, bude deliteľný 5-kou. Číslo sa musí končiť nulou alebo päťkou, aby bolo deliteľné piatimi. Hľadaný rok zvážšený o 4 sa preto musí končiť nulou alebo päťkou, a preto sa tento rok musí končiť 6-kou alebo 1-kou.

Ďalej si môžeme všimnúť, že hľadaný rok zmenšený o 3 je deliteľný 2-kou (teda párny). Aby toto platilo, musí byť hľadaný rok nepárny. Preto sa nemôže končiť 6-kou a posledná cifra takéhoto roku musí byť 1. (Touto úvahou sme zmenšili počet možností, ktoré musíme preveriť na *aspoň** 203 možnosti.)

Pozrieme sa teraz na poslednú podmienku. Keď hľadaný rok zvážšime o 8, bude deliteľný 7-kou. Už vieme, že tento rok sa končí 1-kou a teda keď ho zvážšime o 8, tak sa bude končiť 9-kou. Keď teda nájdeme všetky násobky 7-ky končiace 9-kou, tak z nich potom vieme naspäť vyrobiť všetky roky, ktoré spĺňajú túto podmienku (a končia sa 1-kou).

Násobky 7-ky sú 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91 ...

Každý ďalší násobok dostaneme pripočítaním 7-ky k poslednému násobku. Preto sa budú posledné cifry týchto násobkov vždy opakovať dookola v tomto poradí: 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0, 7, 4, 1, a tak ďalej. Od 49-ky sa bude preto každý desiaty násobok sedmičky končiť cifrou 9. Pripočítavaním čísla 70 k číslu 49 preto vždy dostaneme ďalší násobok 7-ky končiaci 9-kou a žiadny pri tom nevynecháme. Zostali nám teda na overenie už len čísla 41, 111, 181, 251, 321, 391, 461, ...

Ak by sme teraz začali testovať, že ktoré z týchto čísel spĺňajú podmienky zo zadania, tak by sme museli preskúšať už iba 36 možností.

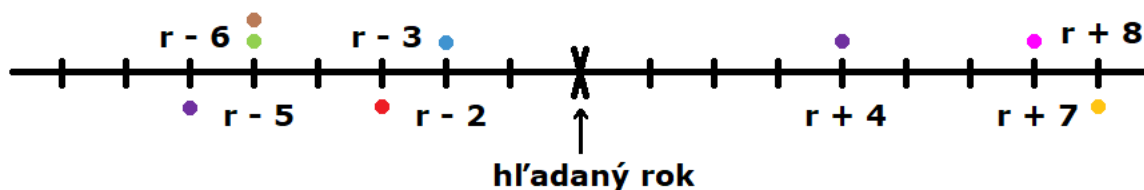
Vieme ešte, že ak hľadaný rok zmenšíme o 5, tak bude deliteľný 4-kou. Číslo je deliteľné 4-kou, ak je jeho posledné dvojčíslenie deliteľné 4-kou. Hľadaný rok sa končí 1-kou, takže keď ho zmenšíme o 5, tak sa bude končiť 6-kou. Takto zmenšený rok sa teda môže končiť iba dvojčísliami 16, 36, 56, 76 a 96. Keď naspäť 5-ku pripočítame, tak dostaneme, že hľadaný rok sa môže končiť iba dvojčísliami 21, 41, 61, 81 a 01. Vyradíme tým polovicu z predchádzajúcich možností a stačilo by teda skontrolovať iba 18 čísel.

Overovaním zvyšných podmienok by nám vyšli iba čísla 41, 881, 1721 a 2561 (väčšie nám už netreba).

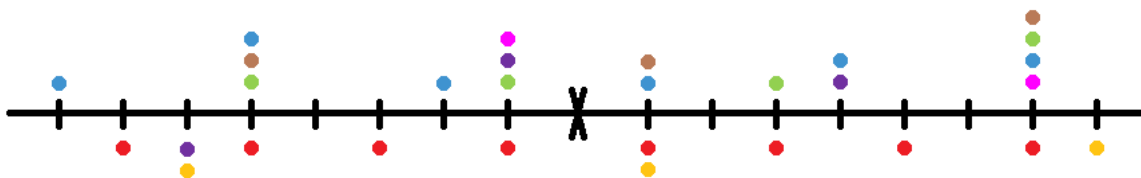
*kedže ešte nevieme až po ktoré číslo to budeme musieť skúšať

Nakoniec uvedieme ešte niekoľko alternatívnych spôsobov riešenia a zaujímavostí o tejto úlohe.

Iné riešenie: Z začať s riešením sa dalo ale aj inak. Môžeme si nakresliť číselnú os a značiť si, čo nám hovoria podmienky zo zadania. Farebné bodky označujú, ktorými z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sú roky deliteľné.



Každé druhé číslo je deliteľné 2-kou, každé tretie je deliteľné 3-kou a každé štvrté 4-kou atď. Dokreslíme teda ďalšie bodky k zvyšným rokům, ktoré sú deliteľné nejakým z týchto čísel.



Vidíme, že rok o 1 väčší bude deliteľný číslami 2, 3, 6 a 7, a teda aj číslom 42. Rok o 1 menší bude deliteľný číslami 2, 4, 5 a 8 a teda aj číslom 40. Hľadáme teda také roky, ktoré sú o 1 väčšie od násobku 40-ky a o 1 menšie od násobku 42-ky. Násobky 40-ky sa budú vždy končiť nulou. Preto násobky 42-ky, ktoré hľadáme, sa musia končiť 2-kou (lebo sú o 2 väčšie ako násobok 40-ky). Takéto násobky sú iba 42, 252, 462, 672, 882, 1092, 1302, 1512, 1722, 1932, 2142, 2352, 2562, ... Z nich sú o 2 väčšie od násobku 40-ky iba čísla 42, 882, 1722 a 2562. Ako jediné teda vyhovujú roky 41, 881, 1721 a 2561 (a väčšie nás už nezaujímajú). Naozaj vyhovujú zadaniu vďaka našej úvahe o číselnej osi.

Iné riešenie: Táto úloha sa dala pekne vyriešiť aj pomocou skúmania zvyškov. Teda zisťovaním, aký zvyšok po delení číslami 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8 má hľadaný rok. Prvý rok s takýmito zvyškami je 41. Ak k nemu pripočítame číslo, ktoré je násobkom 7-ky, tak nezmeníme jeho zvyšok po delení 7-kou. Podobne to platí pre zvyšné čísla 2, 3, 4, 5, 6 a 8. Ak teda k 41-ke pripočítame číslo, ktoré je násobkom čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8, tak dostaneme ďalší vyhovujúci rok, lebo nijako nezmeníme zvyšky po delení. Najmenšie číslo, ktoré je nejakým násobkom všetkých týchto čísel je 840 a hovorí sa mu tiež najmenší spoločný násobok. Žiadne také menšie číslo neexistuje, a teda pripočítavaním čísla 840 ku 41-ke určite žiadne vyhovujúce roky nepreskočíme.

Poznámky: Týchto osem podmienok zo zadania sa dalo ale tiež zredukovať na štyri. Deliteľnosť 8-kou v sebe obsahuje aj informáciu o deliteľnosti 2-kou a 4-kou. Podobne deliteľnosť 6-kou obsahuje informáciu o deliteľnosti 3-kou a 2-kou (tiež deliteľnosti 3-kou a 2-kou určujú deliteľnosť 6-kou).

Táto úloha sa dala riešiť aj ako také sito cez podmienky. Zo všetkých najprv vytriedim tie, ktoré vyhovujú prvej podmienke. Z tých čo mi zvýšili vytriedim tie, ktoré vyhovujú aj druhej podmienke. Z týchto vytriedim tie, ktoré vyhovujú aj tretej podmienke. A tak ďalej. Ak by sme však začali triediť od posledných podmienok, tak by sme tieto čísla preriedovali rýchlejšie.

Toto vzorové riešenie bolo inšpirované vašimi riešeniami, ktoré sa nám všetky veľmi páčili :)