



JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXI. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. až 6. ročník ZŠ a prímu OG
SEZAMKO, Školský rok 2026/2027, 1. zimná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (opravoval Ado Mrázik)

Našou úlohou je zistiť, ako môžeme rozdeliť 60 oviec na niekoľko skupiniek tak, aby počty oviec v skupinkách boli po sebe idúce párne čísla alebo po sebe idúce nepárne čísla. Úlohu môžeme matematicky prerozprávať takto: Akými spôsobmi sa dá číslo 60 rozdeliť na súčet po sebe idúcich párnych čísel alebo súčet po sebe idúcich nepárnych čísel?

Skúsme zistiť, aké budú hodnoty sčítancov, ak číslo 60 rozdelíme na súčet konkrétne **dvoch** po sebe idúcich čísel. Ak by tieto čísla boli rovnaké a nie po sebe idúce, zistili by sme to cez výpočet $60 : 2 = 30$. Čísla ale rovnaké nie sú – majú byť po sebe idúce, čo znamená, že rozdiel týchto dvoch čísel má byť rovný číslu 2. Čísla budeme musieť upraviť. Aby sme zachovali rovnaký súčet týchto čísel, vždy, keď od nejakého čísla odpočítame, musíme k inému pripočítať rovnakú hodnotu. V tomto prípade odpočítame číslo 1, teda: $30 - 1 = 29$, $30 + 1 = 31$. Našli sme prvý výsledok: **číslo 60 sa dá rozdeliť na dve po sebe idúce nepárne čísla, a to 29 a 31**. Dá sa rozdeliť aj na dve po sebe idúce párne čísla? Nedá – pre zachovanie ich súčtu platí, že to, čo pripočítame k jednému číslu musíme odpočítať od druhého; a pre zachovanie pravidla, že čísla sú párne, musíme ku 30 pripočítať najmenej 2. Pre ukážku, čísla 28 a 32 síce spĺňajú súčet 60, no nie sú po sebe idúce.

Rovnakým postupom sa dopracujeme k ďalším výsledkom pri inom počte skupiniek:
 $60 : 3 = 20$; $20 - 2 = 18$, 20 , $20 + 2 = 22$. **Výsledok je 18, 20, 22.**
 $60 : 4 = 15$; $15 - 3 = 12$, $15 - 1 = 14$, $15 + 1 = 16$, $15 + 3 = 18$. **Výsledok je 12, 14, 16, 18.**
 $60 : 5 = 12$; $12 - 4 = 8$, $12 - 2 = 10$, 12 , $12 + 2 = 14$, $12 + 4 = 16$. **Výsledok je 8, 10, 12, 14, 16.**
 $60 : 6 = 10$; $10 - 5 = 5$, $10 - 3 = 7$, $10 - 1 = 9$, $10 + 1 = 11$, $10 + 3 = 13$, $10 + 5 = 15$. **Výsledok je 5, 7, 9, 11, 13, 15.**

Teraz narazíme na problém, výsledok výpočtu $60 : 7$ nie je celé číslo. Z predošlých výpočtov sme si určite všimli istý vzor, ktorý sa používa na nájdenie finálnych čísel. Ak by sme tento vzor teraz použili, keďže $60 : 7$ nie je celé číslo, ani finálne čísla by neboli celé. Keďže ovečky na menšie časti nerozdelíme, číslo 60 na 7 po sebe idúcich párnych alebo nepárnych čísel rozdeliť nedokážeme. Spoliehať sa ale, že vzor musí ďalej pokračovať môže byť chyba, a tak si to ešte raz overíme. Vyskúšajme všetky možnosti: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$, $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56$ a $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 63$. Žiadna možnosť nevyhovuje a všetky ostatné majú ešte väčší súčet a teda taktiež nevyhovujú.

S týmto postupom by sme mohli pokračovať ďalej, no nemusíme. Najmenšia osmica čísel spĺňajúca zadanie je $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$. Keďže jej súčet presahuje 60, nemusíme hľadať ďalej.

Ovce sa môžu rozdeliť do nasledujúcich skupín:

Keď pasie Maťko – 18, 20, 22 alebo 12, 14, 16, 18 alebo 8, 10, 12, 14, 16.

Keď pasie Kubko – 29, 31 alebo 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Úloha č. 2 (opravovali Eliška Držiaková a Peťo Novotný)

Riešenie sa bude ľahšie čítať, ak tri vety zopakujeme:

„Dunčo nebol druhý.“

„Maťko bol druhý.“

„Kubko nebol prvý.“

Rozoberme tri prípady podľa toho, ktorá veta je pravdivá (zvyšné dve sú potom nepravdivé).

- 1) Ak je pravdivá prvá veta a druhá s treťou sú nepravdivé, tak Dunčo nebol druhý, Maťko **nebol** druhý a Kubko **bol** prvý. Vidíme, že nemáme koho dať na druhé miesto, pretože Kubko musí byť prvý a zvyšní dvaja nesmú byť druhí. Prvá veta teda nie je tou pravdivou vetou.
- 2) Ak je pravdivá druhá veta a prvá s treťou sú nepravdivé, tak Dunčo **bol** druhý, Maťko bol druhý a Kubko **bol** prvý. Opäť to neseďí, lebo Dunčo aj Maťko by museli byť druhí. Teda ani druhá veta nie je tou pravdivou vetou.
- 3) Ak je pravdivá tretia veta a prvá s druhou sú nepravdivé, tak Dunčo **bol** druhý, Maťko **nebol** druhý a Kubko nebol prvý. Druhé miesto musíme obsadiť Dunčom, takže Kubka, ktorý nebol prvý, musíme dať na tretie miesto. Pre Maťka zvýšilo len prvé miesto, čo súhlasí s vetou o ňom (nebol druhý). Jediné vyhovujúce poradie je teda 1. Maťko, 2. Dunčo, 3. Kubko.

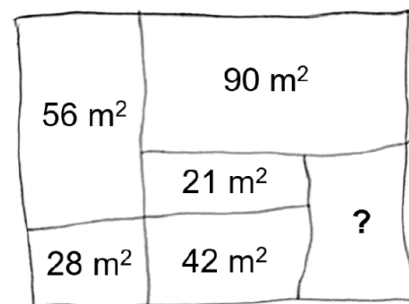
Preteky mohol vyhrať len Maťko.

Iné riešenie: Úloha sa dá riešiť aj tak, že napíšeme všetkých šesť poradí, ako preteky mohli dopadnúť a pre každé poradie overíme, koľko je v tom prípade pravdivých viet. I keď treba rozobrať až šesť prípadov (oproti trom prípadom v riešení vyššie), dá sa to spraviť pomerne rýchlo. Skúste si to.

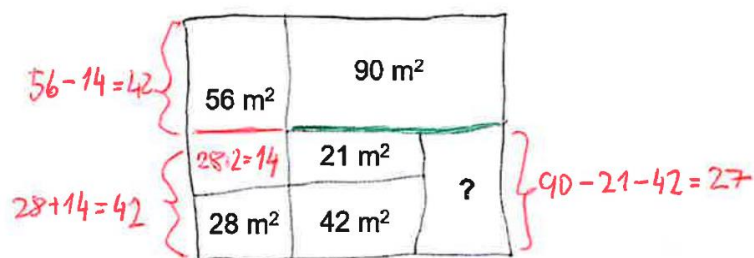
Úloha č. 3 (opravoval Hynek Bachratý)

Táto geometrická úloha bola zaujímavá a prišlo nám viac druhov riešení. Kým si uvedieme tie správne, pripomenieme si pár dôležitých vecí. Názov pravouholník je spoločné označenie pre obdĺžniky a štvorce. Pretože sa v obrázku nachádzajú len tieto útvary, všetky ich strany sú buď rovnobežné, alebo navzájom kolmé. Obrázok je teda naozaj dosť škaredo nakreslený, nemôžeme ho brať za presný a spoliehať sa na jeho konkrétne rozmery.

Plocha pravouholníkov sa ráta veľmi jednoducho, stačí vynásobiť ich šírku a výšku. A preto, keď majú dva pravouholníky jednu stranu spoločnú, pomer ich obsahov je rovnaký ako pomer ich druhých strán. To využijeme pre dvojicu pravouholníkov s plochou 21 m^2 a 42 m^2 , spodný teda musí byť dvakrát vyšší. Podobne pre pravouholníky 28 m^2 a 56 m^2 naľavo je horný z nich dvakrát vyšší.



Teraz sa pozrieme na dve riešenia. V prvom sme si zelenou označili dôležitú spodnú stranu lúky s plochou 90 m^2 , a predĺžili ju ešte dôležitejšiou červenou čiarou. Tá rozdeľuje lúku



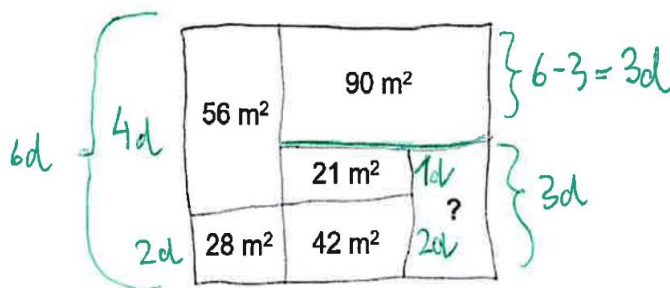
s plochou 56 m^2 na dve časti. Spodná z nich musí mať plochu polovice z 28, teda $28 : 2 = 14 \text{ m}^2$, lebo aj tu je dolný pravouholník dvakrát vyšší a teda má aj dvakrát väčšiu plochu. Obe lúky pod červenou čiarou tak majú plochu $14 + 28 = 42 \text{ m}^2$.

Časť lúky nad červenou čiarou má ale potom plochu $56 - 14 = 42 \text{ m}^2$, teda rovnakú! Červená čiara preto delí vodorovne celú ľavú časť veľkej lúky presne na polovicu, a je teda v jej strede. To isté ale musí robiť v druhej časti aj zelená čiara, a preto nad ňou aj pod ňou musí byť rovnaká plocha 90 m^2 . Dve lúky pod čiarou majú spolu plochu $21 + 42 = 63 \text{ m}^2$, a chýba nám preto presne $90 - 63 = 27 \text{ m}^2$. To je teda plocha poslednej lúky, ktorú sme hľadali.

Plocha poslednej lúky je 27 m^2 .

Čo je dôležité, pri určení tejto plochy sme nevyužili a ani nepotrebovali konkrétne rozmery žiadnej lúky, stačili nám pomery ich obsahov a výšok.

Iné riešenie: Presné rozmery lúk nepotrebuje ani druhé riešenie, ktoré tu spomenieme a obsahuje tú istú dôležitú zelenú čiaru. Výšku lúky s plochou 21 m^2 si teraz označíme $1d$, čo je skratka pre „jeden dielik“. Aká je jeho presná veľkosť nepotrebujeme vedieť, vieme ale, že výška lúky pod ňou potom musí byť dvakrát väčšia, teda $2d$ (dva dieliky). Spolu teda majú lúky s plochou 21 m^2 a 42 m^2 výšku $3d$ (tri dieliky). Naľavo má zase horná lúka plochu 56 m^2 , čo je dvakrát viac ako lúka pod ňou, a preto má aj dvakrát väčšiu výšku, teda $4d$. Výška celej veľkej lúky je preto spolu $2d + 4d = 6d$, a teda zelená čiara ju zase vodorovne delí na dve rovnaké polovice s výškou $3d$ a $3d$. Na dorovnanie hornej plochy 90 m^2 preto zase musíme doplniť 27 m^2 .



Tieto dve (a podobné) riešenia získali plný počet bodov, a to práve preto, že nepotrebovali presné hodnoty rozmerov malých lúk.

Časť vašich riešení ale tieto konkrétne rozmery používala, a preto (správnu) odpoveď **27 m²** zdôvodnila len čiastočne pre tieto lúky. Mnohí ste predpokladali, že rozmery lúk sú len celé čísla v metroch, čo sme ale v zadaní nespomínali a nemusí to byť pravda. Lúka s plochou 21 m² môže mať v pohode rozmer (v metroch) 1x21 alebo 3x7, ale aj 2x10,5, 4x5,25, 4,2x5 alebo 3,5x6 (čo by boli v centimetroch pekné rozmery v celých číslach)! Nevadil by ani rozmer (21/6) x 6 a ani žiadny iný, kde strany môžu byť aj „skaredé“ čísla, ale ich súčin je 21. (Zememerači vedia odmerať aj také dĺžky.) Pokiaľ ste teda v riešení úlohy využívali konkrétne rozmery lúk, nemohli sme za neho dať plný počet bodov.

Úloha č. 4 (opravoval Matej Halama)

Podľa zadania máme 5 oranžových a 4 zelené vrecúška s číslami. Vrecúška sú zavesené vedľa seba tak, že zelené vrecúško je vždy medzi dvoma oranžovými. V tomto príklade nás zaujímajú čísla, a preto o vrecúškach budeme hovoriť ako o oranžových číslach 1, 2, 3, 4, 5 a zelených číslach 3, 4, 5, 6.

Zo zadania máme informáciu o tom, že každé zelené číslo musí byť deliteľné oboma susednými oranžovými číslami. Oranžové čísla teda musia byť delitele zeleného čísla. Vypíšme si teda aké majú delitele zelené čísla:

$$\underline{3}: 1 \text{ a } 3$$

$$\underline{5}: 1 \text{ a } 5$$

$$\underline{4}: 1, 2 \text{ a } 4$$

$$\underline{6}: 1, 2, 3 \text{ a } 6 \text{ (ale 6 nie je jedno z oranžových čísel)}$$

Všimnime si, že čísla 5 a 3 majú iba dvoch deliteľov. Keďže každé zelené číslo musí mať vedľa seba dve oranžové, znamená to, že oba delitele musíme dať vedľa zeleného čísla 3 aj 5.

$$3 - \underline{3} - 1 \quad 5 - \underline{5} - 1$$

Zároveň máme iba jedno oranžové číslo 1, preto musí byť medzi zelenou 3 a 5.

$$3 - \underline{3} - 1 - \underline{5} - 5$$

Oranžová 1 už nemôže byť vedľa iného zeleného čísla. Pre zostávajúce zelené číslo 4 nám tak zostali delitele 2 a 4 a pre zelené číslo 6 nám zostali delitele 2 a 3.

$$3 - \underline{6} - 2 \quad 2 - \underline{4} - 4$$

Tak ako medzi 5 a 3 muselo byť číslo 1, tak musí byť medzi 6 a 4 spoločné číslo 2.

$$3 - \underline{6} - 2 - \underline{4} - 4$$

Teraz už musíme iba spojiť tieto dve časti dokopy. Obe časti majú na jednej strane oranžové číslo 3 iba s jedným susedom, a keďže máme iba jednu oranžovú trojku tak jej susedné zelené čísla budú 3 a 6. Vrecúška teda treba zavesiť nasledovne:

$$5 - \underline{5} - 1 - \underline{3} - 3 - \underline{6} - 2 - \underline{4} - 4 \text{ alebo } 4 - \underline{4} - 2 - \underline{6} - 3 - \underline{3} - 1 - \underline{5} - 5$$