JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XL. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2026/2027, 2. zimná séria
Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (*opravovali Lucka Kováčová a Janči Jakubík****)***

Chceme zistiť, či vieme spoľahlivo určiť farbu poslednej guličky. Guličky vyberáme náhodne. Preto nevieme, ktoré dve guličky práve vyberieme. Musíme teda nájsť niečo, čo platí, nech vyberieme akékoľvek guličky.

Jedno vybratie dvoch guličiek spolu s tým, čo s nimi potom urobíme, budeme volať ťah. Najprv si zapíšeme, čo sa s guličkami stane pri jednom ťahu. Môžu nastať tri prípady:

- Vyberieme dve čierne guličky. Jednu z nich prefarbíme na bielo a vrátime ju do vrecúška. Druhú vyhodíme. Vo vrecúšku je potom o dve čierne guličky menej a o jednu bielu guličku viac.
- Vyberieme dve biele guličky. Jednu z nich vrátime do vrecúška a druhú vyhodíme. Vo vrecúšku je potom o jednu bielu guličku menej. Počet čiernych guličiek sa nezmení.
- Vyberieme jednu bielu a jednu čiernu guličku. Bielu guličku vyhodíme a čiernu vrátime do vrecúška. Vo vrecúšku je potom o jednu bielu guličku menej. Počet čiernych guličiek sa nezmení.

Pozrime, ako sa menia počty guličiek jednotlivých farieb. Počet bielych guličiek sa po ťahu niekedy zväčší o jednu guličku a niekedy zmenší o jednu guličku. Preto budeme sledovať počet čiernych guličiek. Počet čiernych guličiek sa nikdy nezväčší. Po každom ťahu sa buď nezmení, alebo sa zmenší o dve guličky. Preto potrebujeme vedieť, ako sa pri odčítaní správajú párne a nepárne čísla. Keď sa zamyslíme, vieme povedať tieto štyri pravidlá:

- Ak od párneho čísla odčítame párne číslo, dostaneme opäť párne číslo.
- Ak od párneho čísla odčítame nepárne číslo, dostaneme nepárne číslo.
- Ak od nepárneho čísla odčítame párne číslo, dostaneme opäť nepárne číslo.
- Ak od nepárneho čísla odčítame nepárne číslo, dostaneme párne číslo.

Teraz pravidlá použijeme na čierne guličky. Na začiatku je vo vrecúšku 27 čiernych guličiek. Číslo 27 je nepárne. Po prvom ťahu sa počet čiernych guličiek buď nezmení, alebo sa zmenší o dve guličky. Ak sa počet čiernych guličiek nezmení, zostane nepárny. Ak sa zmenší o dve guličky, odčítame párne číslo. Použijeme teda tretie pravidlo: ak od nepárneho čísla odčítame párne číslo, dostaneme opäť nepárne číslo. Pred druhým ťahom je preto počet čiernych guličiek opäť nepárny. Pri druhom ťahu sa preto stane to isté ako pri prvom ťahu. Rovnako to platí pri treťom ťahu a pri každom ďalšom ťahu až do konca. Po každom ťahu teda zostáva rovnaké to, že počet čiernych guličiek je nepárny. Počet čiernych guličiek preto nikdy nemôže byť nula. Posledná gulička preto musí byť čierna.

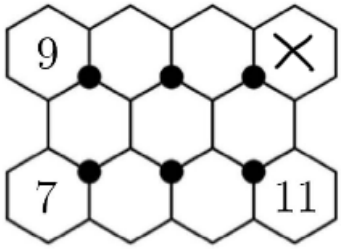
Farbu poslednej guličky vieme určiť spoľahlivo. Posledná gulička bude vždy čierna, bez ohľadu na to, ktoré guličky pri jednotlivých ťahoch vyberieme.

Poznámka: Guličky síce vyberáme náhodne, farba poslednej guličky však náhodná nie je. Nestačí si celý postup niekoľkokrát vyskúšať. Pokus nám ukáže iba to, ako sa postup skončí pri guličkách, ktoré sme práve vybrali. Možností je však veľmi veľa. Preto potrebujeme zdôvodnenie, ktoré platí, nech vyberieme akékoľvek guličky. Takým zdôvodnením je práve sledovanie parity počtu čiernych guličiek.

Zo zadania vieme, že na konci zostane vo vrecúšku jediná gulička. Tento fakt preto overovať nemusíme. Pozrime sa však, či je to možné a či si zadanie neodporuje. Každé dve guličky patria do jedného z troch prípadov. Ďalší ťah teda môžeme urobiť vždy, keď sú vo vrecúšku aspoň dve guličky. V každom ťahu vyhodíme práve jednu guličku. Na začiatku je vo vrecúšku 27 + 27 = 54 guličiek. Po 54 – 1 = 53 ťahoch preto vo vrecúšku zostane jediná gulička. Zadanie si teda neodporuje.

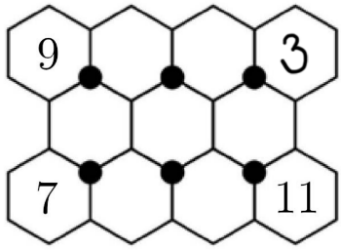
Úloha č. 2 (*opravovali Kika Jančigová a Erika Novotná****)***

Našou úlohou je zistiť, ako rozložiť obrancov k studniam tak, aby platilo pravidlo o rovnakom počte obrancov pri studniach. Možností ako začať je veľa. My si však v tomto riešení ukážeme jednu z nich, pri ktorej dopočítame, aký by musel byť celkový počet obrancov pri jednej studni.



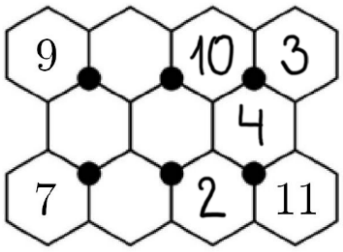
Všimnime si, že obrancovia umiestnení v rohových nádvoriach s číslami 9, 7 a 11 strážia len jednu studňu. Podobne je na tom aj rohové nádvorie označené písmenom x. Všetky ostatné vnútorné nádvoria strážia vždy dve studne.

Z vyššie uvedeného vyplýva, že ak by sme sčítali celkové počty obrancov pri všetkých šiestich studniach, boli by tam rohové čísla započítané iba raz, všetky ostatné nádvoria by tam boli započítané dvakrát. Skúsme tento neznámy šesťnásobok počtu obrancov pri studni vyčísliť. Bol by to súčet všetkých čísel od 1 po 11, plus ešte súčet nerohových nádvorí (lebo tie sú tam až dvakrát). Teda inak povedané, tento hľadaný šesťnásobok je súčet všetkých čísel od 1 po 11 vynásobený dvomi mínus rohové nádvoria (aby tam boli započítané len raz). Vieme vypočítať, že súčet čísel od 1 po 11, je 66. Preto hľadaný šesťnásobok počtu obrancov pri jednej studni bude $2 \cdot 66 - (9 + 7 + 11 + x) = = 132 - (27 + x) = 105 - x$.



Číslo $105 - x$ musí byť deliteľné šiestimi, lebo na hrade je 6 studní s rovnakým celkovým počtom obrancov. Tu máme dve možnosti, buď $x = 3$ a $105 - x = 102$ alebo $x = 9$ a $105 - x = 96$. Možnosť $x = 9$ musíme vylúčiť, lebo by sa opakoval počet obrancov. Ostala nám možnosť $x = 3$, a teda počet obrancov pri jednej studni by bol $102 : 6 = 17$.

Poďme teraz doplniť chýbajúcich obrancov k jednotlivým studniam. Pri studni, kde je 11 obrancov chýba ešte $17 - 11 = 6$ obrancov. Keď ich chceme rozdeliť na dve nádvoria, tak to môžeme spraviť jedine ako 1 + 5, alebo 2 + 4, alebo 3 + 3. Hneď vieme vylúčiť 3 + 3 obrancov, lebo čísla sa nemôžu opakovať.



Pri studni, kde sú 3 obrancovia ešte chýbajú $17 - 3 = 14$ obrancovia. Vieme ich rozdeliť ako 10 + 4, alebo 9 + 5 (číslo 9 je už ale použité), alebo 8 + 6 alebo 7 + 7 obrancov (číslo 7 je už ale použité). Tieto možnosti musíme ešte kombinovať s predošlými možnosťami pri studni s jedenástimi obrancami – keďže majú jedno nádvorie spoločné. Hľadáme teda nejaké spoločné číslo medzi týmito dvoma sadami možností. Jediné spoločné číslo je číslo 4, čiže toto číslo bude v druhom riadku vpravo. Doplníme zvyšné dve čísla tak, aby sedeli súčty pri studniach pri číslach 3 a 11.

Teraz sa pozrime na studňu, pri ktorej už stojí 9 obrancov. Tam potrebujeme doplniť $17 - 9 = 8$ obrancov. To vieme spraviť jedine ako 1 + **7**, **2** + 6, **3** + 5 alebo **4 + 4**. Keď sa pozrieme na tieto dvojice čísel, v každej z týchto dvojíc je aspoň jedno z čísel už v nádvoriach napísané (označili sme ho **tmavo**). Keďže sa čísla nemôžu opakovať, tak k studni s 9 obrancami nevieme doplniť zvyšných 8 obrancov.

Úloha preto nemá riešenie.

Úloha č. 3 (*opravoval Hynek Bachratý****)***

Našou úlohou bolo nájsť aspoň päť riešení rovnice $1/2 = 1/x + 1/y + 1/z$, kde x, y aj z sú prirodzené čísla. Zdá sa, že zlomky všetci dobre poznáte, lebo skoro všetci aspoň päť možností našli a nezabudli výpočtom alebo postupom overiť, že rovnicu naozaj správne riešia.

Niektorí si pomohli „pizza“ obrázkom, štvorčekovým papierom alebo aj hodinovým ciferníkom, mnohým stačilo pracovať len so zlomkami. Na hľadanie riešení ste použili mnoho spôsobov, niektoré boli veľmi zaujímavé a originálne. Spomenieme len niektoré z nich.

Najčastejšie vás ale napadlo rozšíriť zlomok vhodným väčším číslom a zapísať si napr. $1/2 = 12/24$. Čitateľ 12 potom môžeme rôznymi spôsobmi rozdeliť na súčet troch čísel tak, aby sa mi potom dali vykrátiť s menovateľom a dostať zlomky s číslom 1 hore. Tak napríklad $12 = 2 + 4 + 6$ a dostanem zlomky $2/24 + 4/24 + 6/24 = 1/12 + 1/6 + 1/4$. Podobne pre 15/30 je zaujímavý súčet $15 = 2 + 23 + 10$ ale aj pre 21/42 súčet $21 = 1 + 6 + 14$ ...

Niektorí využili, že najväčší z troch zlomkov musí byť najviac 1/3 a najmenej 1/6, a stačilo im už hľadať len zvyšné dva. Na druhej strane, určite stačilo aj začať pozorne skúšať a päť možností sa podarí nájsť.

Dal som si ale tú prácu a vypísal si všetky možnosti, ktoré sa objavili vo vašich riešeniach:

$1/3 + 1/7 + 1/42$, $1/3 + 1/8 + 1/42$, $1/3 + 1/9 + 1/18$, $1/3 + 1/10 + 1/15$, $1/3 + 1/12 + 1/12$,
$1/4 + 1/5 + 1/20$, $1/4 + 1/6 + 1/12$, $1/4 + 1/8 + 1/8$,
$1/5 + 1/5 + 1/10$ a $1/6 + 1/6 + 1/6$.

Spolu je ich desať a ja som vcelku zvedavý, či sú to už všetky, alebo sa dajú nájsť ešte ďalšie. Ak vás zlomky bavia, skúste porozmýšľať.

Úloha č. 4 (*opravovali Anežka Pajunková a Kika Ďuračíková****)***

Väčšina z vás prišla na to, že ornament je najjednoduchšie narysovať tak, že začneme malým päťuholníkom. Pokračujeme kružnicami so stredom vo vrcholoch malého päťuholníka. A nakoniec zostrojíme veľký päťuholník.

Začnime teda malým päťuholníkom. Poslali ste nám rôzne spôsoby ako ho narysovať. Niektorí z vás dokonca nepotrebovali použiť uhlomer. Ale keďže okrem ceruzky môžeme použiť aj pravítko, kružidlo a uhlomer, tak popíšeme postup s uhlomerom. Zvolíme si ľubovoľnú dĺžku strany malého päťuholníka, napríklad tri centimetre, a narysujeme stranu AB. Vieme, že vnútorný uhol pravidelného päťuholníka má veľkosť 108 stupňov. V bode B preto zostrojíme pomocou uhlomera uhol s veľkosťou 108 stupňov a na jeho rameno nanesieme vzdialenosť tri centimetre, čím získame vrchol C. Rovnakým spôsobom postupujeme ďalej, až kým nezískame všetky vrcholy A, B, C, D a E vnútorného pravidelného päťuholníka.

Teraz potrebujeme zostrojiť kružnice. Do kružidla zoberieme vzdialenosť, ktorá sa rovná dĺžke strany AB, teda tri centimetre. Postupne zapichneme kružidlo do každého z vrcholov A, B, C, D a E a narysujeme päť kružníc s polomerom tri centimetre. Pokiaľ ste čítali s porozumením, že stredy kružníc ležia vo vrcholoch malého päťuholníka, tak vám tento krok nerobil problém.

Ďalej chceme narysovať strany vonkajšieho pravidelného päťuholníka. Každá strana tohto vonkajšieho päťuholníka je spoločnou dotyčnicou dvoch susedných kružníc. Dotyčnica má tú vlastnosť, že sa dotýka kružnice v práve jednom bode. Niektorí z vás len spojili „od oka“ susedné kružnice. Problém však je, že pri spájaní „od oka“ priamka kružnicu ľahko pretne v dvoch bodoch. Voľným okom to nemusíme vidieť, keďže tieto dva priesečníky môžu byť veľmi blízko seba.

Vieme, že dotyčnica ku kružnici je vždy kolmá na polomer v bode dotyku. Navyše si môžeme uvedomiť, že strany vonkajšieho päťuholníka budú rovnobežné so stranami vnútorného päťuholníka. Teda polomer v bode dotyku kružnice so stranou vonkajšieho päťuholníka je kolmý aj na príslušnú stranu vnútorného päťuholníka. Pozrime sa napríklad na stranu AB vnútorného päťuholníka. Ak v bodoch A a B zostrojíme kolmice na úsečku AB, tieto kolmice pretnú príslušné kružnice presne v bodoch dotyku. Spojnicou týchto dvoch bodov dotyku získame priamku, ktorá je dotyčnicou oboch kružníc a zároveň je rovnobežná so stranou AB. Rovnaký výsledok dosiahneme aj vtedy, ak na stranu AB zostrojíme kolmicu, nanesieme na ňu polomer kružnice a povedieme rovnobežku so stranou AB. Takto zostrojíme dotyčnice aj k ostatným dvojiciam susedných kružníc. Priesečníky týchto piatich dotyčníc nám vytvoria vrcholy hľadaného vonkajšieho pravidelného päťuholníka.

Na záver prikladáme na ukážku ornament narysovaný našou riešiteľkou Alenkou Koutnou.

